pow 2022-06
연세대학교 의학과 2018191030 2018학번 나영준

(a) the solution is Catalan number $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

증명 $x_0 \div x_1 \div \cdots\cdots \div x_n$의 parenthesization의 총 수를 C_n이라고하자

그리고 x_0의 parenthesization의 수를 1 (즉 (x_0)로 표기한다고 하자), $x_0 \div x_1$의 parenthesization 수를 1이라고 정의하자(즉 $(x_0 \div x_1)$ 그럼

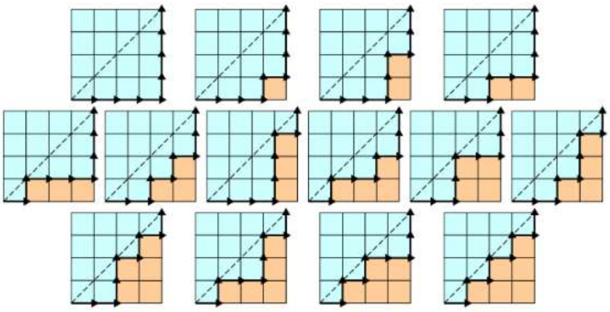
$((x_0 \div \cdots\cdots \div x_k) \div (x_{k+1} \div \cdots\cdots \div x_n))$의 경우 parenthesization의 수는 $C_k * C_{n-k-1}$

이유 빨간색의 parenthesization의 수는 C_k 파란색의 parenthesization의 수는 C_{n-k-1}이므로

따라서 $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k * C_{n-k-1}$이 성립한다.

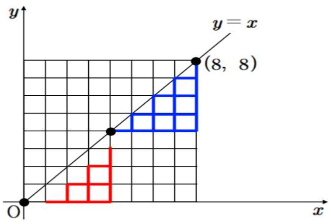
이 점화식과 초기항은 n*n 정사각형의 (0,0)에서 (n,n)으로 가는 경로 중 y=x를 통과하지 않는 경로의 총 수와 같다.

예시



증명 경로상에서 두 번째로 y=x를 통과하는 점을 (k,k)라고 하자(첫번째로 지나는 점은 (0,0)이므로

그럼 (0,0)에서 (k,k)로 가는 경로의 수는 C_{k-1} (k,k)에서 (n,n)으로 가는 경로의 수는 C_{n-k}



(이 그림을 참고)

따라서 $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} * C_{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i * C_{n-i-1}$

$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k * C_{n-k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$임을 보이면 된다

증명 (0,0)에서 (n,n)으로 가는 경로의 총 수는 $\binom{2n}{n}$이다

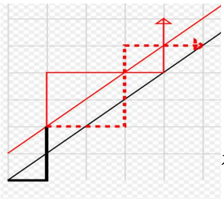
그 중 y=x를 가로지르는 경로의 총 수를 빼면된다. 이를 bad path라 하자 그러면 이런 경로는 y=x+1을 무조건 통과한다. 그럼 처음으로 y=x+1을 통과하는 점을 (k,k+1)이라하자

그럼 우리가 논한 경로는 (k,k)도 지난다. 이제 (k,k+1)->(n,n)으로 가는 경로를 오른쪽으로

이동했을땐 위로 가고 위로 갈땐 오른쪽으로 가도록 바꾸자 그럼 원래 경로는 (0,0)->(k,k)->(k,k+1)->(n,n)이었지만
변경된 경로는 (0,0)->(k,k)->(k,k+1)->(n-1,n+1)이다.
즉 우리가 구하는 bad path는 (0,0)에서 (n-1,n+1)로 가는 경로의 총 수보다 작거나 같다.
하지만 (0,0)에서 (n-1,n+1)로 가는 경로는 (k,k)->(k,k+1)라는 경로가 무조건 존재한다.(존재하지 않는다면 (n-1)+1<n+1이므로 (k,k+1)라는 점을 통과해야만 하는데 (0,0)에서 출발했으므로 (0,0)에서 (k,k+1)이라는 경로는 (s,s)라는 점을 통과한다 그때 (s,s)->(s+1,s)라는 경로만 존재한다면 도착지점의 x좌표는 y좌표보다 크거나 같을 수밖에 없고 이는 도착지점이 (k,k+1)이라는 것에 모순이 된다.)
따라서 모든 (0,0)에서 (n-1,n+1)로 가는 경로는 bad path로 바꿀 수 있다. 따라서 bad path는 (0,0)에서 (n-1,n+1)로 가는 경로보다 크거나 같아야 한다.
따라서 bad path의 수는 (0,0)에서 (n-1,n+1)로 가는 경로의 총 수랑 같다.

$$bad\,path = \binom{2n}{n+1}$$

따라서 $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$


참고 그림

(b) The solution is n=2k-1이면 $\frac{x_0x_2\cdots x_{2k-2}}{x_1x_3\cdots x_{2k-1}}$ n=2k이면 $\frac{x_0x_2\cdots x_{2k}}{x_1x_3\cdots x_{2k-1}}$이랑

$\frac{x_0x_2\cdots x_{2k-2}}{x_1x_3\cdots x_{2k-1}x_{2k}}$ 개수는 $\frac{n-2\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+1}{n+\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+1}\binom{n+\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+1}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}$

위에 있는 y=x를 통과하지 않는 경로와 parenthesization는 1대1 대응이 존재한다.
이는 ÷는 오른쪽으로 이동하는 것으로 대응하면 되고)는 위쪽으로 이동하는 것으로 대응하면 된다.{이때 괄호의 개수는 n개로 맨 왼쪽에 (를 추가하고 맨 오른쪽에)를 추가한 parenthesization이다.}
따라서 분수가 서로 같으려면 (0,0)에서 (n,n) 사이 경로 중 y=x를 통과하지 않는 경로를 다음과 같이 나타내었을 때
첫 번째 1칸 오른쪽 이동-> a_1(위쪽으로 이동한 수) 두 번째 1칸 왼쪽이동-> a_2(위쪽으로 이동한 수)....... n번째 1칸 오른쪽 이동 -> a_n(위쪽으로 이동한 수)라는 수열로 나타낼 수 있다.
만약 다른 두 parenthesization(또는 경로)의 분수가 같으려면 모든 k에 대해 $|a_k - b_k| \equiv 0 \pmod{2}$ 를 만족해야한다.(명제 a)(이때 a_k, b_k는 위와 같이 parenthesization를 경로로 나타내었을 때 위쪽으로 이동한 수를 나타내는 수열)

명제 a 증명

분수꼴로 나타내었을 때 자명하게 x_0는 분자에 위치하고 x_1은 분모에 위치한다. (1,0)에서 짝수 숫자만큼 위로 올라간다면 x_2는 분자에 위치하고 홀수 숫자만큼 위로 올라간다면 x_2는 분모에 위치한다. $(2,a_1)$에서 짝수만큼 위로 올라간다면 x_3는 분모에 위치하고 홀수만큼 위로 올라간다면 x_3는 분자에 위치한다. 마찬가지 과정으로 $(k-1,\sum_{i=0}^{k-2}a_i)$에서 짝수만큼 위로 올라간다면 (즉 a_{k-1}이 짝수라면) x_k는 k가 짝수라면 분자에 위치하고 k가 홀수라면 분모에 위치한다. $(k-1,\sum_{i=0}^{k-2}a_i)$에서 홀수만큼 위로 올라간다면 (즉 a_{k-1}이 홀수라면) x_k는 k가 짝수라면 분모에 위치하고 k가 홀수라면 분자에 위치한다.

이런 성질 때문에 명제 a가 성립한다.

n=2k-1이면 $\frac{x_0x_2\cdots x_{2k-2}}{x_1x_3\cdots x_{2k-1}}$ n=2k이면 $\frac{x_0x_2\cdots\cdot x_{2k}}{x_1x_3\cdots x_{2k-1}}$이랑 $\frac{x_0x_2\cdots x_{2k-2}}{x_1x_3\cdots x_{2k-1}x_{2k}}$ 이들이 왜 가장 많이 나오는 분수인지를 증명해보자 (명제 b)

수학적 귀납법을 이용하면 n=2일 때 $\frac{x_0x_2}{x_1},\frac{x_0}{x_1x_2}$가 각각 1개씩 나와서 명제 b가 성립한다.

마찬가지로 n=3일 때 $\frac{x_0x_2}{x_1x_3}$ 2개로 최대가 나온다.

일반적인 n일 때

x_2가 분자에 위치한다면 (1,1)->(2,1)을 지나는 것이다. 그럼 (1,1)에서 (n,n)사이의 경로 중 동일한 분수가 최대가 될 것이다.(이러한 경로를 a라 하자 (2,1)->(n,n))

이때 수학적 귀납법에 의해 (1,1)->(2,1)->(2,2)로 가는 경로는 배제된다.

(이유 (2,0)->(2,2)로 가는 경로랑 동일하고 이 경로의 같은 분수는 (n,0)->(n,n)을 포함하는 경로가 있으므로 순수하게 더 크기 때문에)

하지만 x_2가 분모에 위치한다면 (1,0)->(2,0)에서 (n,n)사이의 경로 중 동일한 분수가 최대일 것이다.(이러한 경로를 b라 하자) 그럼 a의 경로 그대로 간 이후 마지막에 위로 가기만 하면 된다. 그럼 b의 경로의 수는 a의 경로 수보다 크거나 같다.

하지만 (2,0)->(2,2)에서 (n,n)사이의 경로 중 동일한 분수가 존재하므로 (이유 최대 경로는 귀납법 가정에 따라 최대 경로는 계속 오른쪽으로 간 후 마지막에 위쪽으로 가는 것 또는 n이 짝수라면 계속 오른쪽으로 간 후 n-1에서 (n-1,n-1)을 가는 경우가 가장 빈도 수 높은 분수가 되는데 이는 (3,0)에서 (n,n)사이 경로에 동일하게 존재하기 때문이다.)

따라서 최대 분수는 x_2가 분자에 위치해야한다.

마찬가지 이유로 x_3가 분자에 위치한다면 (2,1)->(3,1)을 지나는 것이다. 이는 앞선 이유와 마찬가지 논리로 (2,0)->(3,0)으로 가는 경로의 수가 (2,1)->(3,1)을 지나는 같은 분수의 경로의 수보다 크거나 같고 (2,2)->(3,2)의 경우도 존재하므로 x_3는 분모에만 존재해야한다.

x_k에서 k가 홀수라면 k=2j+1이고 (2j,2w)->(2j+1,2w)의 최대 빈도 분수의 경로의 수는 (2j,2w+1)->(2j+1,2w+1)과 크거나 같고 2w는 총 j+1개가 가능하지만 2w+1은 총 j개가 가능하므로 x_k는 분모에 위치해야한다.

x_k에서 k가 짝수라면 k=2j이고 (2j-1,2w)->(2j,2w)->(2j+1,2w)의 최대 빈도 분수의 경로의 수는 (2j-1,2w+1)->(2j,2w+1)->(2j+1,2w+1)과 크거나 같고 2w는 총 j개가 가능하고 2w+1은 총 j개가 가능하다 이때 (2j-1,0)->(2j,0)->(2j,2j)->(2j+1,2j)의 경우가 배제되었는데 이 경우도 수학적 귀납법에 따라 최대 빈도분수랑 같은 분수가 나올 수 있다.
따라서 (2j-1,2w)->(2j,2w)의 최대 빈도 분수의 경로의 수가 (2j-1,2w+1)->(2j,2w+1)의 경로의 수보다 더 크다 즉 x_k가 분자에 위치해야한다.
이러한 과정을 반복하면 n(n=2k+1)이 홀수라면 x_n은 (n-1,2i)->(n,2i)을 포함하는 경로의 수는 k+1개로 (n-1,2i-1)->(n,2i-1)인 k보다 크므로 x_n은 분모에 위치해야한다.
n(n=2k)이 짝수라면 x_n은 (n-1,2i)->(n,2i)을 포함하는 경로의 수는 k개 (n-1,2i-1)->(n,2i-1)도 k개로 서로 같다. 따라서 x_n이 어느 위치이더라도 상관이 없다.

이제 조건을 만족하는 경우의 수를 구하면 된다.
이 문제는 n이 짝수일때는 위로는 2씩 움직일 수 있고 y=x를 가로지르지 않는 경로의 수를 구하면 되므로 이는 $b \geq ma \geq 0$에서 m=2 b=n=2k, a=n/2=k일 때 (0,0)에서 (a,b)까지 y=mx의 아래를 통과하지 않는 경로의 총 수랑 같다.
n이 홀수일 때도 마찬가지로 $b \geq ma \geq 0$에서 m=2 b=n=2k+1, a=k일 때 (0,0)에서 (a,b)까지 y=mx의 아래를 통과하지 않는 경로의 총 수랑 같다.
(그 이유: 마지막 위로 갔을 때만 1칸 가고 나머지는 2칸씩 가는데 위의 경로에서 a가 1칸 갔을 때 두칸가고 (2a,b)를 도착했을 때 (2a+1,b)로 가면 n이 홀수일 때 최대빈도 분수의 경로와 일대일 대응이 된다.)
이 경우 경로의 총 개수는 $\frac{b-ma+1}{b+a+1}\binom{a+b+1}{a}$가 된다.
증명1: $T_m(a,b)$를 우리가 구하는 경로라고 한다면 자명하게 $T_m(0,b)=1$이고 $b > ma > 0$일 때 $T_m(a,b)=T_m(a-1,b)+T_m(a,b-1)$이고 $T_m(a,ma)=T_m(a-1,ma)$이므로 a+b에 대해 수학적 귀납법을 적용하면 된다.

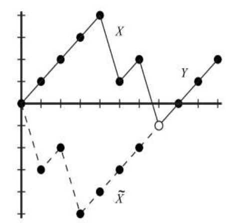


그림 4
증명2: 이때 우리의 문제를 다음과 같이 변형하자 위로 가는 경로를 (1,1)로 가고 오른쪽으로 가는 경로를 (1,-m)만큼 가는 것으로 변형하고 a+b+1 step만큼 움직이고 (1,1)은 b+1만큼 움직였을 때 처음에는 (1,1)로 가고 다음 a+b개의 step에서 위로 가는 경로를 (1,1)로 가고 오른쪽으로 가는 경로를(1,-m)만큼 간다고 했을 때 x축에 만나지 않는 경로의 총 수를 구하면 된다. 일단 총 a+b+1 step 만큼 움직이었으므로 경로의 총 수는 $\binom{b+a+1}{a}$ 여기서 조건에 안 맞는 경로의 총 수를 빼면된다. 이때 처음으로 x축 아래를 지나는 점을 P_i라고 하면 P_i의 y좌

표의 범위는 $0 \le P_i$의 y좌표 $\le m$이다. 그런데 (0,0)에서 P_i까지의 점을 180도 돌린 후(그림4) 이어붙이면 맨 아래 부분은 (1,-m)만큼 이동한 것이므로 잘못된 P_i의 y좌표가 같을 경우 잘못된 경로의 총 수는 $\binom{b+a}{b+1}$이다 ((1,1) 움직임을 추가했으므로) 따라서 잘못된 경로의 총수는 $(m+1)\binom{b+a}{b+1}$이고

구하는 경로의 총 수는 $\binom{b+a+1}{a}$-$(m+1)\binom{b+a}{b+1}$=$\frac{b-ma+1}{b+a+1}\binom{a+b+1}{a}$이다.