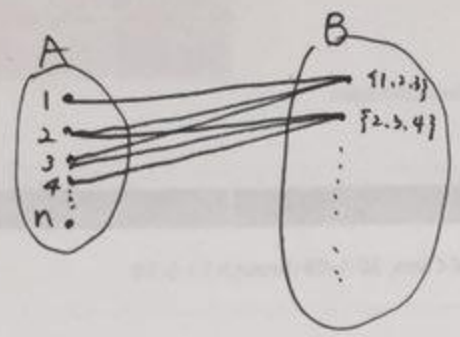
다음의 이분그래프를 생각해보자.



$A = \{1, 2, \dots, n\}$

B는 A의 부분집합 중 size가 3인 모든 집합들.

즉, $|B| = \binom{n}{3}$

그래프의 edge는 원소의 포함관계에 의해 정의.

즉, B의 모든 vertex는 degree가 3.

(A의 모든 vertex는 degree가 $\binom{n-1}{2}$)

<u>claim)</u> 매우 큰 n에 대해 위 이분그래프는

1) 3개의 ~~tree~~ forest로 partition 되지만

2) 2개의 planar graph로 partition 되지는 않는다.

---

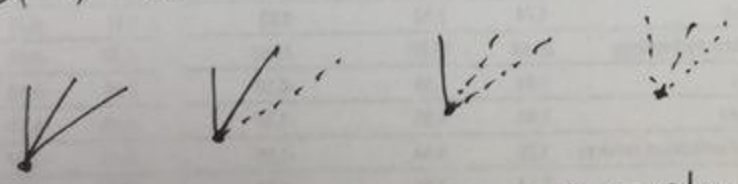
1)은 비교적 쉽다. B의 각 vertex에 대해 연결되어 있는 edge 3개를 하나씩 아무렇게나 T_1, T_2, T_3에 나누어 담자.

그러면 각 T_i를 보면 forest of stars가 된다.

(star는 depth 1 짜리 tree)

2)를 보이기 위해 두 planar graph G_1, G_2로 partition 되었다고 해보자.

B의 각 vertex에서 보면 다음 네가지 type 중 하나다.



(실선은 G_1-edge, 점선은 G_2-edge)

적어도 한 type은 $\binom{n}{3}/4$ 이상의 점을 가지고 있다.

~~2 type 이상~~ 일반성을 잃지않고 2 type이 왼쪽의 2개 중 하나라고 해도 된다. 이제 이 점들을 보면 G_1-edge를 2개 이상 가지고 있다

이중 한 edge를 ~~contr~~ contraction 시켜보자.

그러면 A 쪽에 edge가 하나 생긴다.

이런식으로 A 쪽에 edge를 적어도 $\binom{n}{3}/4$ 개 만들 수 있다.

(G_1 안에서)

그런데 각 A쪽 edge는 multiplicity가 최대 $n-2$ 이다.

왜냐하면 A쪽의 모든 pair에 대해 A쪽 edge를 만들 가능성이 있는

B쪽의 vertex가 $\binom{n-2}{1}$ 개 있기 때문이다.

그래서 A쪽의 edge에 multiplicity를 제거하고

A쪽만 simple graph로 만들어도 여전히 $\binom{n}{3}/4\cdot(n-2)$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)}}{3\cdot 2\cdot 4\cdot\cancel{(n-2)}} = \frac{1}{24}(n)(n-1)$$ 개의 edge가 있다.

n이 충분히 크면 $\frac{n(n-1)}{24} > 3n-6$ 이 되므로

A쪽의 simple graph는 planar graph일 수 없다.

그런데 이 그래프는 G_1의 minor 이므로

G_1이 애초에 planar 였다는 사실에 모순.

따라서 2)가 성립한다.