

POW 2017-16 Finding a Rectangle 2016 최대범

조건을 만족하는 coloring이 있다고 가정하자. 두 가지 색을 R, B라 하자.

Van der Waerden's theorem에 의해 어떤 n, k 가 존재해서 $(0, n), \dots, (0, n+4k)$ 가 모두 같은 색이다. 일반성을 잃지 않고 $(0, 0), \dots, (0, 4)$ 가 모두 R로 칠해졌다고 하자.

R •	(0, 4)	(1, 4)	(2, 4)	만약 $(1, i)$ 중 서로 다른 2개 $(1, j), (1, k)$ 가 R로 칠해졌다면, $(0, j), (1, j), (0, k), (1, k)$ 가 $d/c = j-k /1 = 1, 2, 3, 4$ 여서 조건에 모순이다. 따라서 $(1, i)$ 중 R로 칠해진 것은 최대 1개이다. 마찬가지로, $(2, i)$ 중 B로 칠해진 것은 최대 2개이다. (3개이면 $(1, j), (2, j), (1, k), (2, k)$ 가 모두 B인 것이 존재한다.)
R •	(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	
R •	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)	
R •	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	
R •	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	

따라서 $(2, i)$ 중 최소 3개는 B로 칠해져야 한다. 이 3개를 $(2, i), (2, j), (2, k)$ ($i < j < k$)라 하자. 만약 $j-i, k-j, k-i$ 중 2 혹은 4가 있다면, * 즉 $(2, a), (2, b)$ 가 R로 칠해지고 $b-a=2$ or 4이면 $(2, a), (2, b), (0, a), (0, b)$ 가 $(b-a)/2 = 1$ or 2이므로 조건에 모순이다. 따라서, $1 \leq i < j < k \leq 5$, $k-i, k-j, j-i \neq 2$ or 4여야 하는데, $k-j, j-i = 1$ or 3이고, 둘다 3일 수 없으므로 $k-i = (k-j) + (j-i) = 2$ or 4여서 모순이다. 따라서 조건을 만족하는 coloring은 존재하지 않는다.

* $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ 대신 $\{1, 2, 3, 4\}$ 만 해도 만 된다.