POW 2017-13 Infinite Series With Recurrence Relation 2016[redacted] 최대범

$b_n = (n+1)a_n$으로 놓자. 그럼 $b_n = (n+1)(b_{n-1}+b_{n-2})$ 이며, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+2)!}{b_n b_{n+1}}$ 을 계산하면 충분하다.

<u>Claim</u> $b_n = (n+2)! \sum_{k=0}^{n+2} \frac{(-1)^k}{k!}$

proof. $n=0,1$일 때는 자명하다. $n-1, n$일 때를 가정하고 $n+1$일 때를 보자.

$$b_{n+1} = (n+2)\cdot(b_{n-1}+b_n) = (n+2)\left((n+1)!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!} + (n+2)!\sum_{k=0}^{n+2}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

$$= (n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+1)!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!} + (n+2)\cdot(n+2)!\cdot\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$= (n+3)!\cdot\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!} + (n+3)!\left(\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+3)!}\right)$$

$$= (n+3)!\sum_{k=0}^{n+3}\frac{(-1)^k}{k!}.$$ 따라서 수학적 귀납법에 의해 성립한다.

위 claim에 의해, $b_{n+1} = (n+3)b_n + (-1)^{n+1}$ 이다.

$$(-1)^n\frac{(n+2)!}{b_n b_{n+1}} = \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{(n+3)b_n}\right)\times(n+3)! = \frac{(n+3)!}{b_{n+1}} - \frac{(n+2)!}{b_n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{(n+2)!}{b_n b_{n+1}} = \frac{(k+3)!}{b_{k+1}} - \frac{2!}{b_0} = \frac{1}{\sum_{m=0}^{k+3}\frac{(-1)^m}{m!}} - 2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)!}{b_n b_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{a_n a_{n+1}} = e-2.$$