POW 2016-23 : Inequality on complex numbers

Ki Joung Jang

December 3, 2016

$z_k = x_i + iy_k$와 같이 쓰면 본 식은 다음과 같이 된다 : $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k = 0$일 때,

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(y_{k+1}-y_k)^2 \geq 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2 + \sum_{k=1}^{n} y_i^2\right)$$

(이 때, $x_{n+1} = x_1$이며, $y_{n+1} = y_1$) 즉 다음과 같이, 본 식의 *실수 판*을 보이면, 두 부등식을 더함으로써 증명을 완료할 수 있다.

Claim 1. *$\sum_{k=1}^n x_k = 0$일 때,*

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)^2 \geq 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} x_i^2$$

(단, $x_{n+1} = x_1$로 정의하자.)

Proof. $n \leq 2$일 경우는 매우 자명하므로, $n > 2$를 가정하자. ($n = 1$이면 0, $n = 2$이면 $x_1 = -x_2$로부터 항상 등호가 성립한다.) $x_1 = \cdots = x_n = 0$이면 자명. 이제 0이 아닌 항이 있다고 하면, 본 뷰등식은 x_i에 같은 nonzero constant c를 곱해도 성립하므로, WLOG $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$이라고 할 수 있다. 이제 본 문제는 두 개의 constraint $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$에서 n 변수 함수 $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k)^2$의 최솟값을 구하는 문제가 된다. 이를 위해 Lagrange multiplier를 사용한다. f는 확실히 smooth한 함수이며, 영역 $g_1(x_1, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, $g_2(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$은 compact 하므로 f는 이 영역에서 최대/최소값을 가지며, 그러한 점을 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$라고 하면, 적당한 실수 λ_1, λ_2 에 대해

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{a})$$

를 만족시키며, 이를 각 성분에 대해 나타내면

$$2a_k - 2a_{k-1} - 2a_{k+1} = \lambda_1 + 2\lambda_2 a_k$$

와 같이 쓸 수 있다. (단 $a_0 = a_n$) 우선 $k = 1, \cdots, n$ 에 대해 더하면 나머지 항은 전부 사라지므로 $\lambda_1 = 0$. 따라서 이를 대입하고 양변을 2로 나누면

$$a_k - a_{k-1} - a_{k+1} = \lambda_2 a_k$$

로 정리된다. 이제 $a_{n+i} = a_i$로 정의함으로서 a를 무한 수열으로 확장하면, 위 식은 모든 k에 대해 성립하게 되므로 특성방정식 $r^2 - (1-\lambda_2)r + 1 = 0$의 해 α, β, 그를 결정하는 판별식 $D = (1-\lambda_2)^2 - 4$에 따라 위 식이 달라지게 된다:

- $D > 0$: 서로 다른 두 실수해를 가지며, 일반적으로 $\alpha > 1 > \beta$이며, 적당한 상수 A, B에 대해 $a_k = A\alpha^k + B\beta^k$을 만족한다. 이 때 $A \neq 0$이면 $k \to \infty$에 대해 a_k이 발산하는데 a_k은 periodic 하므로 모순. 따라서 $A = 0$. 이제 $ak = B\beta^k$은 0으로 수렴하는데 역시 periodic해야하므로 유일하게 가능한 경우는 $B = 0$일 때이며, 이 때 $a_k = 0$이므로 전부 0이 되어 초기 가정에 모순.

- $D = 0$: $\alpha = \beta = 1$ 또는 $\alpha = \beta = -1$이며 일반적으로 $a_k = (Ak + B)\alpha^k$를 만족함을 보일 수 있다. 위와 같은 논증으로 $A = 0$을 보일 수 있으며, $\alpha = 1$이라면 합이 0인 조건에서 $B = 0$이라 역시 모순이다. 따라서 유일하게 남는 경우는 $\alpha = -1$, $a_k = B(-1)^k$일 경우인데(합 조건에서 k가 짝수여야 한다.) 이 때 $|a_{k+1} - a_k| = 2|a_k|$가 되므로 $f(\mathbf{a}) = 4$.

- $D < 0$: 일반적으로 특성 방정식이 복소수 해를 가지게 되는데, 일반적으로 $\alpha = Me^{i\theta}$, $\beta = Me^{-i\theta}$(M은 적당한 양의 실수 : 둘은 켤레복소수이므로)와 같이 쓸 수 있다. 이 때, 잘 정리하면 일반적으로 적당한 상수 A, B, C, γ에 대해, $a_k = A\alpha^k + B\beta^k = CM^k \sin(k\theta + \gamma)$과 같이 쓸 수 있다. $C = 0$이면 모든 항이 0이 되므로 $C \neq 0$. $\alpha\beta = 1$에서 $M = 1$을 얻어낼 수 있으므로 $a_k = C\sin(k\theta + \gamma)$를 얻어낼 수 있다. 이제 a_k가 주기 n인 수열이 되어야 함에서 $a_{n+k} = a_k$를 대입해 정리하면 $\cos(\gamma + (n/2 + k)\theta)\sin(n\theta/2) = 0$을 얻는데, $\sin(n\theta/2) \neq 0$이라면 cos값이 항상 0이 되어야 하는데, 이는 cos내부의 값이 π의 배수 단위로 움직어야 하므로 $\theta = m\pi$의 결과를 얻게 된다. m이 홀수라면 $a_k = B(-1)^k$의 꼴이 되므로 위에서 다뤘고, m이 짝수라면 a_k는 상수가 되어 전부 0이 되므로 모순. 이제 남은 경우는 $\sin(n\theta/2) = 0$이 될 때 뿐인데, 이 때 적당한 m에 대해 $\theta = 2m\pi/n$이 된다 단 (θ는 π의 정수배가 아님(앞에서 다뤘다)). 또 a_k가 실수이므로 C 역시 실수가 된다. 이 때 $a_1 + \cdots + a_n = 0$임은 정n각형의 무게중심으로부터 자명하며, 이 때
$$(a_{k+1} - a_k)^2 = 4C^2 \cos^2((k + 1/2)\theta + \gamma)\sin^2(\theta/2)$$
가 되는데, $\cos^2((k + 1/2)\theta + \gamma) = \sin(k\theta + \gamma + (\theta + \pi)/2)$ 이며 일반적으로 $n \geq 3$에 대해 $\sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\theta + \delta) = n/2$는 δ에 무관하게 일정하므로($\cos^2$와 더하면 n이 되는데 $\cos^2 - \sin^2$를 하면 $\cos(2k\theta + 2\gamma)$ 가 되고, 이는 역시 정 n각형, 혹은 정 $n/2$-각형 2개의 무게중심을 구하는 것을 생각하는 과 동치이므로 0이 됨을 쉽게 유도할 수 있다. 따라서 $\sin^2$의 합과 $\cos^2$의 합은 같고 그 값은 $n/2$.) 위 식을 $k = 1, 2, \cdots, n$에 대해 더하면 $f(\mathbf{a}) = 4\sin^2(\theta/2) \geq 4\sin^2(\pi/n)$이 된다. ($\theta$가 π의 정수배가 아니므로 $\sin(\theta/2) \neq 0$이면서 안에 들어가는 값은 π/n의 정수배가 되는데, 그러한 값 중 가장 작은 값의 절댓값이 $\sin(\pi/n)$이 된다.)

이로부터 모든 가능한 극값에서의 f값이 $4\sin^2(\pi/n)$이상임을 보였으므로, 함수의 최솟값 역시 $4\sin^2(\pi/n)$이상임을 결론지을 수 있고 이는 곧 **Claim**을 유도한다. □