# POW 2016-21 : Bound on the number of divisors

수리과학과 2014학번 장기정

November 20, 2016

$M$과 무관하게 $C = 1$로만 둬도 충분하다. 이를 증명하기 위해 정수론에서 유명한 다음 정리를 (증명 없이) 사용하겠다.

**Lemma 1.** *(Bertrand's postulate) 임의의 자연수 $n \geq 2$에 대해, $n < p < 2n$인 소수 $p$가 존재한다.*

이로부터 다음을 유도할 수 있다.

**Corollary 1.** *작은 순서대로 $n$번째 소수(prime number)를 $p_n$이라고 정의하면, $p_n \leq 2^n$.*

*Proof.* $n$에 대한 수학적 귀납법을 이용한다 : $n = 1$이면 $p_1 = 2$이므로 성립. $k \geq 1$에 대해, $p_k \leq 2^k$ 이라면 **Lemma**에 의해 $p_k < p < 2p_k$인 소수 $p$가 존재하며, 이는 $p_{k+1}$이상이므로

$$p_{k+1} \leq p \leq 2p_k \leq 2^{k+1}.$$

□

이제 자연수 수열 $\{K_t\}$을 $K_t = p_1 p_2 \cdots p_t$와 같이 정의하자. **Corollary 1**에 의해 $K_t \leq 2^1 2^2 \cdots 2^t = 2^{t(t+1)/2}$이며, $d(K_t) = 2^t$임을 매우 쉽게 확인할 수 있다. 구체적으로 :

$$\log K_t \leq \log 2^{t(t+1)/2} = (t(t+1)\log 2)/2 \leq t^2$$

이므로, 일반적으로 고정된 $M$에 대해,

$$(\log K_t)^M \leq t^{2M}$$

과 같이 쓸 수 있다. 그러나, L'Hospital 정리 등에의해 $t \to \infty$일때

$$2^t / t^{2M} \to \infty$$

임을 알 수 있으므로, 극한 정의를 써주면 적당히 큰 $t_0$가 존재해 모든 $t > t_0$에 대해 $2^t / t_{2M} \geq 1$가 되도록 할 수 있고, 이 때 모든 $t > t_0$에 대해

$$d(K_t) = 2^t \geq t^{2M} \geq (\log K_t)^M$$

가 되어 무한히 많은 $n = K_t, t > t_0$에 대해 준식이 성립하게 된다.