2016-20 : Finding a subspace

수리과학과 2014학번 장기정

November 15, 2016

본 문제에서 $m(X)$는 다양한 차원의 실수 공간 R^t의 부분집합 X의 Lebesgue 측도를 나타낸다고 하자(다소 abuse할 수도 있다). 우선 측도에 관한 다음과 같은 사실을 명시하고 넘어가자. (증명은 생략한다.)

Lemma 1. *측도가 0인 집합의 countable union의 측도는 여전히 0이다.*

Lemma 2. *$\mathbb{R}^t$에서 측도가 0인 집합 X에 대해, $X' = X \times \mathbb{R}^s \subset \mathbb{R}^{t+s}$의 측도도 0이다.*

Lemma 3. *측도가 0인 집합의 부분집합은 measurable하며, 부분집합의 측도 역시 0이다.*

이제 $\mathbb{R}^n$의 k차원 부분공간 $V_1, V_2, \cdots$를 잡으면, 각 V_i에 대해 그들의 orthonormal basis $(\mathbf{b}_{i1}, \cdots, \mathbf{b}_{ik})$를 잡을 수 있다. 이제 R^{kn}의 부분집합 X_i를 다음과 같이 정의하자:

$$X_i = \{(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k) | \det(\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{b}_{iq} | 1 \le p, q \le k) = 0\}$$

Claim 1. $m(X_i) = 0$.

Proof. 축을 적당히 옮겨서 WLOG, $(\mathbf{b}_{i1}, \cdots, \mathbf{b}_{ik}) = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_k)$로 두더라도 측도가 0인 성질은 보존된다. 이 때 X_i는 단순히 k개 벡터에서 앞의 k개 성분을 뽑아내 얻은 행렬의 행렬식이 0인 것에 나머지 항에는 제한 조건이 없게 되고, **Lemma 2**에 의해 이는 행렬식이 0인 $k \times k$ 행렬이 $\mathbb{R}^{k^2}$에서 측도가 0임을 보이면 충분하다. 수학적 귀납버을 이용하자: $k = 1$이면 그냥 0밖에 없으므로 자명. $G = \{(x_{ij}) | \det(x_{ij}) = 0\}$을 determinant가 0인 matrix들의 집합을 $\mathbb{R}^{k^2}$의 부분집합으로 본 것이라고 할 때, 그 charactaristic function χ_G를 생각하자. 우선 G 자체는 continuous function인 det의 preimage이므로 measurable하다. 이제 $X = \mathbb{R}^{k^2-1}$, $Y = \mathbb{R}$이라고 할 때, x를 고정하고, $\int_Y \chi_G(x, y)dy$의 value를 생각하자: 이는 x에 의존하는데, 만약 행렬로서 $(k-1) \times (k-1)$ 행렬이 invertible하면 det는 x_{kk}에 대한 nonconstant linear 함수이므로 G에 속하게 되는 y는 하나이며, 따라서 그 적분은 0이다. 한편, $(k-1) \times (k-1)$부분행렬의 행렬식이 0이라면 x_{kk}에 의존하지 않아 해당하는 값은 없거나 실수 전체가 되는데, 어느 쪽이든 그러한 x의 값이 X에서 measure zero이므로(수학적 귀납법과 **Lemma 2**를 이용하면 성립한다) $\int_X \int_Y \chi_G(x, y)dydx = 0$이 된다. 실수의 유한 차원 공간은 Lebesgue measure에 대해 σ-finite함은 매우 잘 알려져 있으므로, Fubini-Tonelli Theorem을 적용할 수 있으며 이를 $X \times Y$에 대해 적분한 값은 $m(G)$가 되므로 이를 종합하면 $m(G) = 0$을 얻고 이는 **Claim**을 유도한다. □

이제 **Claim**과 **Lemma 1**에 의해, $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ 역시 측도가 0이며 $\mathbb{R}^{kn}$을 완전히 cover하지 못함을 알 수 있고, 따라서 이들 모두에 속하지 않는 $(\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_k)$를 잡을 수 있다. 한편 이것은 linearly independent하며(linearly independent하지 않다면 모든 X_i에 속하게 된다) 따라서 이로부터 k차원 subspace U를 만들 수 있으며 이 때 $W = U^{\perp}$라고 정의하자. 이 때, 임의의 i에 대해 $V_i \cap W$의 원소를 $\mathbf{z}$라 하자. V_i의 원소이므로 $\mathbf{z} = a_1\mathbf{b}_{i1} + \cdots + a_k\mathbf{b}_{ik}$와 같이 쓸 수 있는데, U의 임의의 원소와도 orthogonal해야 하므로 그 임의의 원소를 $b_1\mathbf{y}_1 + \cdots + b_k\mathbf{y}_k$와 같이 쓸 수 있을 것이고 따라서 이를 정리하면 임의의 $b_1, \cdots, b_k$에 대해서 $(b_1 \cdots b_k)[\mathbf{y}_p \cdot \mathbf{b}_{iq} | 1 \le p, q \le k](a_1 \cdots a_k)^t = 0$이 된다. 이는 $[\mathbf{y}_p \cdot \mathbf{b}_{iq} | 1 \le p, q \le k](a_1 \cdots a_k)^t = 0$과 동치인데, X_i의 정의와 $\mathbf{y}_i$들의 정의에 의해 이들은 위 행렬은 invertible하며, 따라서 $a_1 = \cdots = a_k = 0 \Rightarrow \mathbf{z} = 0$을 얻는다. 따라서 $\dim V_i \cap W = 0$이고 W가 우리가 찾던 $(n-k)$차원 부분공간이 됨을 증명하였다.