

POW 2016-15 : Pair of integers

수리과학과 2014학번 장기정

September 26, 2016

우선 a, b 중 하나가 1일 때, WLOG $a = 1$ 일 때를 살펴보면, $b|3$ 이므로 $b = 1, 3$. 둘 중 어느 것도 $a|b^2 + b + 1$ 을 만족하므로 우선 $(a, b) = (1, 1), (1, 3), (3, 1)$ 의 해를 찾을 수 있다.
이제, $a, b > 1$ 을 가정하자. 우선 $(a, b) = d$ 라고 할 때, $a|b^2 + b + 1 \Rightarrow d|b^2 + b + 1 \Rightarrow d|1$ 이므로 $d = 1$. 즉 $a \neq b$ 이다. 한편 다음이 성립한다.

Claim 1. (a, b) 가 해라면, $(b, (b^2 + b + 1)/a)$ 역시 해가 된다.

Proof. $k = (b^2 + b + 1)/a$ 라 하자. $k|b^2 + b + 1$ 은 자명하므로 $b|k^2 + k + 1$ 만 보이면 된다. $b|a^2 + a + 1$ 이므로 $a^2 + a + 1 = lb$ 가 되는 자연수 l 이 존재하는데, 이 때 양변에 k^2 를 곱해 정리하면 $k^2lb = (ka)^2 + k(ka) + k^2 \equiv 1 + k + k^2 \pmod{b}$ 가 되는데, 좌변이 b 의 배수이므로 우변도 b 의 배수가 되어 증명 끝. $\square$

이제 다음과 같은 수열을 정의하자.

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_{n-1}} (n \geq 1)$$

이 때, $(u_n, u_{n+1}), (u_{n+1}, u_n) (n \geq 0)$ 이 본 문제의 모든 해(이러한 순서쌍을 좋은 순서쌍이라고 하자)임을 보일 수 있다. 대략적으로 다음 과정을 거친다.

u_n 은 정수이며, 모든 좋은 순서쌍은 해가 된다. n 에 대한 수학적 귀납법. $n = 0, 1$ 일 때 성립하며, (u_k, u_{k+1}) 이 해가 된다면 $(u_k^2 + u_k + 1)/u_{k+1} = u_{k+2}$ 는 정수이며, **Claim 1**에 의해 $(u_{k+1}, (u_k^2 + u_k + 1)/u_{k+1}) = (u_{k+1}, u_{k+2})$ 도 해가 된다. 식이 대칭적이므로 순서쌍의 순서를 바꿔도 당연히 해가 된다.

모든 해는 좋은 순서쌍이다. 좋은 순서쌍이 아니면서 $\min\{a, b\}$ 가 가장 작은 해를 (a_0, b_0) 이라 하자. a, b 중 하나가 1인 해는 좋은 순서쌍이 됨($3 = u_2$)을 이미 확인했으므로 $a_0, b_0 > 1$. 이 때 $a_0 \neq b_0$ 이므로 WLOG $a_0 > b_0$ 이라 둘 수 있다. **Claim 1**에 의해 $(b_0, k_0 = (b_0^2 + b_0 + 1)/a_0)$ 역시 해가 되는데, 이 때 $k_0 = (b_0^2 + b_0 + 1)/a_0 \leq (b_0^2 + b_0 + 1)/(b_0 + 1) < b_0 + 1$ 이고 $b_0 > 1$ 이므로 $k_0 \neq b_0$ 이므로 $k_0 < b_0$. 따라서 (b_0, k_0) 가 최솟값이 더 작은 해가 되므로 좋은 순서쌍이 되어야 한다. $k_0 < b_0$ 이므로 $(b_0, k_0) = (u_{l+1}, u_l)$ 이 되는 자연수 l 이 존재하며(u_i 수열이 증가수열임은 자명.) , 이 때 $(a_0, b_0) = (u_{l+2}, u_{l+1})$ 역시 좋은 순서쌍이 되어 가정에 모순.

따라서 위에서 정의한 좋은 순서쌍이 본 식을 만족하는 모든 해임이 증명되었다.