POW2016-04

Kim KeeTack

March 30, 2016

Problem. Let T be tree on n vertices $V = \{1, 2, \cdots, n\}$. For two vertices i and j, let d_{ij} be the distance between i and j, that is the number of edges in the unique path from i to j. Let $D_T(x) = \left(x^{d_{ij}}\right)_{i,j \in V}$ be the $n \times n$ matrix. Probe that

$$\det(D_T(x)) = \left(1 - x^2\right)^{n-1}.$$

Solution. 먼저, tree T에 대해, 두 index i, j를 바꿔도 $\det(D_T(x))$ 값은 일정하다: T_1를 T에서 각 꼭지점에 대응대는 수들 중 i, j를 바꾼 tree라고 하면, $D_{T_1}(x)$은 $D_T(x)$의 i행과 j행을 바꾸고, i열과 j열을 바꾼 행렬이 되므로, determinant의 성질에 의해 $\det(D_T(x)) = \det(D_{T_1}(x))$ 이다.

이제 수학적 귀납법으로 문제를 증명하자. $V = \{1\}$ 이면, $D_T(x) = \left(x^{d_{11}}\right) = \left(x^0\right) = \left(1\right)$ 에서 $\det(D_T(x)) = 1 = \left(1 - x^2\right)^{1-1}$ 이다. 이제 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ 일때 성립한다고 하자. 꼭지점이 $n+1$개인 tree T에 대해, 다른 n개의 꼭지점 중 단 하나의 꼭지점하고만 연결되어 있는 꼭지점을 하나 찾을 수 있다. 이 꼭지점을 $n+1$, 그와 연결되어있는 꼭지점을 n으로 다시 번호를 매기자(그래도 determinant는 변하지 않는다). 그러면 $d_{i,n+1} = d_{n+1,i} = d_{i,n} + 1$이다. 꼭지점 $n+1$ 을 제외한 n개의 꼭지점이 만드는 tree를 T_1, T_1의 n번째 행을 $v_n = \left(x^{r_{n,1}}, \cdots, x^{r_{n,n}}\right)$ 이라고 하자. 가정에 의해 $\det(D_{T_1}(x)) = \left(1 - x^2\right)^{n-1}$이고, $\left(x^{r_{1,n+1}}, \cdots, x^{r_{n,n+1}}, x^{r_{n+1,n+1}}\right) = (xv_n, 1)$이다. 즉,

$$\begin{aligned}
\det(D_T(x)) &= \det\begin{pmatrix} D_{T_1} & {}^T(xv_n) \\ xv_n & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} D_{T_1} & 0 \\ xv_n & 1 - x \cdot x^{r_{n+1,n}} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} D_{T_1} & 0 \\ xv_n & 1 - x^2 \end{pmatrix} = \left(1 - x^2\right)\det(D_{T_1}(x)) \\
&= \left(1 - x^2\right)^n
\end{aligned}$$

따라서, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해, $\det(D_T(x)) = \left(1 - x^2\right)^{n-1}$이다.