POW 2016-2:

수리과학과 2014학번 장기정.

Claim) $x \in [-1. 0]$ 에 대해,

$$1+(a+1)x \le x+\frac{1}{2}x^2+e^{ax} \le 1+(a+1)x+\frac{1}{2}(1+a^2)x^2.$$

pf) $t \le 0$ 에서 $1+t \le e^t \le 1+t+\frac{1}{2}t^2$ 임은 매우 간단하다. $t=ax$ 대입후 양변에 $x+\frac{1}{2}x^2$ 를 더하자.

이제 $\varepsilon_n = \frac{2(\ln n)}{n}$ 으로 두자. 이때

$$\int_{-1}^{0} n\cdot(x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax})^n dx$$
$$= \int_{-1}^{-\varepsilon_n} n\cdot\left(x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax}\right)^n dx + \int_{-\varepsilon_n}^{0} n\left(x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax}\right)^n dx.$$

$\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$ 이므로, n을 적당히 크게 잡아 $e^{-\varepsilon_n} > \frac{1}{2}$, $\varepsilon_n < \frac{1}{a+1}$ 이 모두 만족하도록 하자.

이때 변변을 따져주면

$$\left|\int_{-1}^{-\varepsilon_n} n\cdot\left(x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax}\right)^n dx\right| \le \int_{-1}^{-\varepsilon_n} n\left|x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax}\right|^n dx \le n\cdot \max\{(\tfrac{1}{2})^n, e^{-n\varepsilon_n}\} = \frac{1}{n}$$
$$\left|\int_{-\varepsilon_n}^{0} n\left(x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax}\right)^n - n(1+(a+1)x)^n)\,dx\right| \le \int_{-\varepsilon_n}^{0} n\left|\left(x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax}\right)^n-(1+(a+1)x)^n\right|dx.$$
$$\le \int_{-\varepsilon_n}^{0} n\cdot\left(\tfrac{1}{2}(1+a^2)x^2\right)\cdot n\cdot\left|x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax}\right|^{n-1}dx$$
$$\le \tfrac{1}{2}(1+a^2)n^2\int_{-\varepsilon_n}^{0} x^2dx = \tfrac{1}{6}(1+a^2)n^2\cdot\varepsilon_n^3 = \tfrac{4}{3}(1+a^2)\cdot\frac{(\ln n)^3}{n}.$$
$$\int_{-\varepsilon_n}^{0} n\cdot(1+(a+1)x)^n dx = \int_{1-(a+1)\varepsilon_n}^{1} ny^n\left(\frac{1}{a+1}dy\right) = \frac{n}{(a+1)(n+1)}\left(1-(1-(a+1)\varepsilon_n)^n\right)$$

임을 확인할수 있다. 따라서

$$\left|\int_{-1}^{0} n\left(x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax}\right)^n dx - \frac{1}{a+1}\right| \le \frac{1}{(a+1)(n+1)} + \frac{n}{(a+1)(n+1)}\left(1-2(a+1)\cdot\frac{\ln n}{n}\right)^n + \frac{4}{3}(1+a^2)\frac{(\ln n)^3}{n} + \frac{1}{n}.$$

이며, 4개의항 모두 $n\to\infty$ 에서 0으로 수렴함을 확인할 수있다. (두번째항의경우 반드시 $\frac{1}{a+1}\left(1-2(a+1)\frac{\ln n}{n}\right)^n$ 보다 작으며 $\ln\left(\left(1-2(a+1)\frac{\ln n}{n}\right)^n\right) \le n\ln\left(1-2(a+1)\cdot\frac{\ln n}{n}\right) \le n\cdot\left(-(a+1)\cdot\frac{\ln n}{n}\right) = -(a+1)\ln n \to -\infty$ as $n\to\infty$ 이므로 본식은 0으로 수렴하며 ($\frac{\ln n}{n}\to 0$ 이며 적당히 작은 $t>0$에대해 $(-t, 0)$에서 $\ln(1+t) \le \frac{1}{2}t$ 가되게할수 있다.) 나머지항이 0으로 수렴함은 거의 자명)

$$\boxed{\therefore \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{0} n\cdot\left(x+\tfrac{1}{2}x^2+e^{ax}\right)^n dx = \frac{1}{a+1}}$$