

POW 2015-19 : Sum of tangent functions

수리과학과 2014학번 장기정

October 30, 2015

Claim 1. $n \geq 0$ 에 대해,

$$\sum_{k=0}^n 2^k \tan \frac{\pi}{4 \cdot 2^{n-k}} = \cot \frac{\pi}{4 \cdot 2^n}$$

Proof. n 에 수학적 귀납법을 적용하자.

(i) $n = 0$: 좌변과 우변 모두 1이므로 성립.

(ii) $n_0 > 0$ 에 대해, Claim이 $n = n_0 - 1$ 일 때 성립한다고 가정하자. 이 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n_0} 2^k \tan \frac{\pi}{4 \cdot 2^{n_0-k}} &= 2 \sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k \tan \frac{\pi}{4 \cdot 2^{n_0-1-k}} + \tan \frac{\pi}{4 \cdot 2^{n_0}} \\ &= 2 \cot \frac{\pi}{4 \cdot 2^{n_0-1}} + \tan \frac{\pi}{4 \cdot 2^{n_0}} \\ &= \cot \frac{\pi}{4 \cdot 2^{n_0}}. \end{aligned}$$

마지막 줄은 탄젠트 배각공식 $\tan 2\theta = 2 \tan \theta / (1 - \tan^2 \theta)$ 에 $\theta = \pi / (4 \cdot 2^{n_0})$ 를 대입한 후 이항시켜 얻을 수 있다. $\square$