POW 2014-15 홍익대학교 수학교육과 13학번 장유진

sol) $\theta=\frac{1}{3}$ 일 때 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

$\theta\neq\frac{1}{3}$ 일 때 $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

pf) 먼저 임의의 $c\in\mathbb{R}$에 대해 $f''(c)$가 존재함을 보이자.

$x\neq y$이면 $f''(\theta y+(1-\theta)x)=\underbrace{\frac{f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)}{(y-x)^2}\times 2}_{\in\mathbb{R}}$ 이고 임의의 $c\in\mathbb{R}$에 대해

$c=\theta y+(1-\theta)x$ 이고 $y\neq x$인 x,y가 존재

$y\neq x$일 때 양변을 y에 대한 함수로 보면 우변 $f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)$, $\frac{1}{(y-x)^2}\in C^\infty$ 이므로

좌변도 C^∞ 이다.

$\therefore$ $c\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$에 대해 $f^{(n)}(c)$ 존재

case1) $\theta=0$일 때 $f(y)=f(x)+(y-x)f'(x)+\frac{(y-x)^2}{2}f''(x)$ 이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ 꼴이다.

case2) 주어진 식 $f(y)=f(x)+(y-x)f'(x)+\frac{(y-x)^2}{2}f''(\theta y+(1-\theta)x)$를 x에 대해 미분하면
$\theta\neq 0$일 때

$$0=\cancel{f'(x)}-\cancel{f'(x)}+(y-x)f''(x)-(y-x)f''(\theta y+(1-\theta)x)+\frac{(y-x)^2(1-\theta)}{2}f'''(\theta y+(1-\theta)x)$$

$y\neq x$일 때, 양변을 $(y-x)$로 나눈 후 정리하면

$$f''(\theta y+(1-\theta)x)-f''(x)=\frac{(y-x)(1-\theta)}{2}f'''(\theta y+(1-\theta)x) \quad \text{------} \quad (*)$$

양변을 $\theta(y-x)$로 나누면

$$\frac{f''(\theta(y-x)+x)-f''(x)}{\theta(y-x)}=\frac{1-\theta}{2\theta}f'''(\theta y+(1-\theta)x)$$

$y\to x$ 일 때 양변을 정리하면

$$f'''(x)=\frac{1-\theta}{2\theta}f'''(x)$$

$$\Rightarrow \frac{3\theta-1}{2\theta}f'''(x)=0$$

case2-1) $\theta\neq\frac{1}{3}$ 이면 임의의 x에 대해 $f'''(x)=0$ 이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ 이다. ($a,b,c\in\mathbb{R}$) 이를 문제의 eqn에 대입하면 성립하므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ 꼴

case 2-2) $\theta=\frac{1}{3}$일 때

$(*)$에 $\theta=\frac{1}{3}$을 대입하면 $f''(\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}x)-f''(x)=\frac{y-x}{3}f'''(\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}x)$

양변을 y에 대해 미분하면

$$\cancel{\frac{1}{3}f'''(\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}x)}=\cancel{\frac{1}{3}f'''(\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}x)}+\frac{y-x}{9}f''''(\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}x)$$

$y\neq x$ 이고 임의의 $x,y\in\mathbb{R}$에 대해 성립하므로 $x\in\mathbb{R}$, $f''''(x)=0$ 이다.

따라서 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 이다

이를 문제의 eqn에 대입하면 성립하므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 꼴이다.