Problem Suppose that $a_1, a_2, \cdots$ are positive real numbers. Prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqq e\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

pf) 자연수 k에 대한 부등식 $k! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^k$(*)를 먼저 보이자. 귀납법을 사용할 것이다.

$k=1$일 때는 $1 > \frac{4}{e^2}$로 성립한다. $k-1$일 때 성립함을 가정하면

$$k! = k(k-1)! > k\left(\frac{k}{e}\right)^{k-1} = \left(\frac{k+1}{e}\right)^k\left(\frac{k}{k+1}\right)^k e.$$

그리고 $1+x \leqq e^x$라는 사실을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqq \left(e^{\frac{1}{k}}\right)^k = e.$$

위 두 식을 조합하면 $k! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^k$. 이제 원래 부등식을 증명하자.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}a_1\frac{2}{n\sqrt[n]{n!}}a_2\cdots\frac{n}{n\sqrt[n]{n!}}a_n\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}a_1+\frac{2}{n\sqrt[n]{n!}}a_2+\cdots+\frac{n}{n\sqrt[n]{n!}}a_n\right) \qquad \text{(산술기하 부등식)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n}{k\sqrt[k]{k!}}\right)a_n
\end{aligned}$$

모든 항이 양이기 때문에 극한이 수렴한다면 더하는 순서를 바꿔도 상관없고, 마지막 등호가 성립한다. (*)를 적용하면

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n}{k\sqrt[k]{k!}}\right)a_n &< \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{en}{k(k+1)}\right)a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{en}{k}-\frac{en}{k+1}\right)\right)a_n \\
&= e\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right).
\end{aligned}$$

마지막 극한은 수렴하므로 Comparison Test에 의하면 앞에 사용한 극한들도 모두 수렴한다. 따라서 주어진 부등식이 증명되었다. 등호는 성립하지 않는다.