KAIST POW 2014-03

KAIST 13학번 (수리과학과)
박훈민(Hun-Min, Park)

Problem.

Let $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ be a function satisfying the following conditions:
(1) For any $x, y \geq 0$, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$
(2) For any $x \in [0, 2]$, $f(x) \geq x^2 - x$
Prove that, for any positive integer M and positive reals $n_1, n_2, \cdots, n_M$ with $n_1 + n_2 + \cdots + n_M = M$, we have

$$f(n_1) + f(n_2) + \cdots + f(n_M) \geq 0$$

Proof.

Claim. $f(x) \geq x - 1 \quad \cdots (*)$

proof of the claim.
$x \in [2k, 2k+2] (k = 0, 1, 2, \cdots)$라 두고 k에 대한 induction을 사용하자.
- $k = 0$일 때; 조건 (2)에 의해 $f(x) \geq x^2 - x = (x-1)^2 + (x-1) \geq x - 1$이므로 $(*)$ is true.
- $k = m (m \geq 0)$일 때 $(*)$가 참이라고 가정하자. 그러면 귀납가정에 의하여

$$f(x+2) \underset{\text{by (1)}}{\geq} f(x) + f(2) \underset{\text{by 귀납가정, (2)}}{\geq} (x-1) + (2^2 - 2) = (x+2) - 1$$

곧 $k = m+1$ 일 때도 $(*)$는 참이다.
따라서, principle of mathematical induction에 의하여 $(*)$는 임의의 $x \geq 0$에 대해 항상 참이다.
$\triangle$

식 $(*)$로부터, 조건을 만족하는 $n_1, \cdots, n_M$에 대하여

$$\sum_{i=0}^{M} f(n_i) \geq \sum_{i=0}^{M} (n_i - 1) = M - M = 0$$

따라서 $\sum_{i=0}^{M} f(n_i) \geq 0$. $\square$