KAIST POW 2013-23

Hansol Jeon (Korea Univ.)

2013년 12월 7일

Step 1. $\forall i : a_i \geq 0$이기 때문에 $P(0) \geq 0,\ x \geq 0 \Rightarrow P'(x) \geq 0$이며, 고로 $P(x) = 0$은 양수근을 가지지 않는다. 따라서 정수열 $\{b_i\}_{b_i > 0}, \{c_i\}_{c_i \geq 0}$에 대해

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} (b_i x + c_i)$$

로 쓸 수 있다.

Step 2. 이제 $a_0 = 0$임을 보이자. 만약 $a_0 \neq 0$이라면 $\forall i : c_i > 0$이고, $\prod b_i (= a_n)$과 $\prod c_i (= a_0)$가 동시에 1은 아니기 때문에 1보다 큰 b_i나 c_i가 있다. 따라서 a_2를 비교하여

$$a_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j \frac{c_1 c_2 \cdots c_n}{c_i c_j} > \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \binom{n}{2}$$

를 얻는다. 고로 $a_2 \leq n$이려면 $\frac{n(n-1)}{2} < n \Rightarrow n \leq 2$이어야 한다. 그런데 방정식 $2x^2 + 1 = 0,\ x^2 + 2 = 0$은 유리근을 가지지 않는다.

Step 3. 이제 문제의 조건을 만족하는 $P(x)$를 구하려 한다. **Step 2.**에 의해 일반성을 잃지 않고 $b_1 = 1,\ c_1 = 0$이라 둘 수 있다. 즉

$$P(x) = x \prod_{i=2}^{n} (b_i x + c_i) = x(a_n x^{n-1} + \cdots + a_3 x^2 + a_2 x + a_1)$$

여기서는 a_3을 비교하여,

$$a_3 = \sum_{2 \leq i < j \leq n} b_i b_j \frac{c_2 c_3 \cdots c_n}{c_i c_j} > \sum_{2 \leq i < j \leq n} 1 = \binom{n-1}{2}$$

따라서 $a_3 \leq n$이려면 $\frac{(n-1)(n-2)}{2} < n \ \Rightarrow\ n^2 - 5n + 2 < 0 \ \Rightarrow\ n < 5$ 이어야 한다.

Step 4. 마지막으로 $n \leq 4$에 대해서 문제의 조건을 만족하는 다항식을 모두 찾자.

(1) $n=1$일 때 $P(x)=x$

(2) $n=2$일 때 $P(x)=2x^2+x,\ x^2+2x$

(3) $n=3$일 때 $P(x)=x^3+3x^2+2x,\ 2x^3+3x^2+x$

(4) $n=4$일 때 $P(x)=x(b_2x+c_2)(b_3x+c_3)(b_4x+c_4)=x(a_4x^3+\cdots+a_2x+a_1)$
에서 a_2를 비교하면

$$a_2=\sum_{\substack{2\le i<j\le 4\\ k\ne i,j}} b_kc_ic_j > \sum_{\substack{2\le i<j\le 4\\ k\ne i,j}} 1 = \binom{3}{2}$$

므로 $a_2, a_3 > 3$이다. 즉 $a_2=a_3=4$이 되는데, 이는 문제의 조건에 모순된다.