$(0,\infty)$에서 정의된 함수 $(x\ln x-x+1)$은 1에서 0이고 $(xlnx-x+1)'=\ln x$는 $x<1$이면 음, $x>1$이면 양이므로 $x\ln x-x+1\geqq 0$, $x\ln x-x+1=0 \iff x=1$.

$g:(0,\infty)\to R$, $x\neq 1$이면 $g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x\ln x-x+1}$, $g(1)=2$라고 하자. $g>0$은 쉽게 확인 가능하다.

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\frac{1}{x}}=2$ ($\because$ 로피탈의 정리)

이므로 g는 연속함수이다. 그리고 약간의 계산을 통하여 g가 2번 미분 가능하며 위로 볼록인 함수라는 것도 확인할 수 있다.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=1$$

이므로 (적분 형태의)젠센 부등식(Jensen's inequality)에 의하면

$$\int_0^1 g(f(x))\,dx\leqq g\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)=g(1)=2.$$

그럼

$2\int_0^1 f(x)\ln f(x)\,dx=2\int_0^1 f(x)\ln f(x)-f(x)+1\,dx$

$\geqq \int_0^1(\sqrt{g(f(x))})^2\,dx\int_0^1(\sqrt{f(x)\ln f(x)-f(x)+1})^2\,dx$

$(x\ln x-x+1\geqq 0$, $f>0$이므로 $f(x)\ln f(x)-f(x)+1\geqq 0)$

$\geqq\left(\int_0^1\sqrt{g(f(x))(f(x)\ln f(x)-f(x)+1)}\,dx\right)$ ($\because$ 코시 부등식(Cauchy–Schwarz inequality))

$=\left(\int_0^1|f(x)-1|\,dx\right)^2$