KAIST POW 2013-18

KAIST 13학번
박훈민(Hun-Min, Park)

Problem.

Let R be a ring of characteristic zero. Suppose that $e, f, g \in R$ are idempotent (with respect to the multiplicaation) and satisty $e + f + g = 0$. Show that $e = f = g = 0$. (An element a is idempotent if $a^2 = a$.)

Proof.

우선 다음과 같은 보조정리를 증명하자.

Lemma. $a, b \in R$이 idempotent이고 $2a + 2b + ab + ba = 0$이면 $a + 1$, $b + 1$은 invertible이고 $(a + 1)(b + 1) = (b + 1)(a + 1) = 1$

proof of the lemma.

$$a(2a + 2b + ab + ba) = 2a^2 + 2ab + a^2b + aba = 2a + 2ab + ab + aba = 2a + 3ab + aba = 0$$

$$(2a + 2b + ab + ba)a = 2a^2 + 2ba + aba + ba^2 = 2a + 2ba + aba + ba = 2a + 3ba + aba = 0$$

윗식에서 아랫식을 빼면 $3(ab - ba) = 0$; 따라서 $ab = ba$. 이를 다시 조건에 대입하면

$$2a + 2b + ab + ba = 2(a + b + ab)(= 2(a + b + ba)) = 0 \Rightarrow a + b + ab = a + b + ba = 0$$

따라서 $(a + 1)(b + 1) = (b + 1)(a + 1) = 1$, 곧 $a + 1, b + 1$은 invertible하다. $\triangle$

문제의 조건으로부터 $e^2 = e$이고 $e = -(f + g)$이므로

$$-(f + g) = e = e^2 = (f + g)(f + g) = f^2 + g^2 + fg + gf = f + g + fg + gf$$

$$\therefore 2f + 2g + fg + gf = 0$$

따라서, lemma로부터 $(f + 1)(g + 1) = (g + 1)(f + 1) = 1$. 마찬가지로

$$(e + 1)(g + 1) = (g + 1)(e + 1) = 1, (f + 1)(e + 1) = (e + 1)(f + 1) = 1$$

여기서 $f + 1 = x$라고 하면 $g + 1 = (f + 1)^{-1} = x^{-1} \Rightarrow e + 1 = (g + 1)^{-1} = (x^{-1})^{-1} = x \Rightarrow x = f + 1 = (e + 1)^{-1} = x^{-1}$. 곧 $x^2 = 1$; 그런데 $f^2 = f$이므로

$$x - 1 = f = f^2 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 = 1 - 2x + 1$$

$$3(x - 1) = 0 \ \therefore x = 1$$

따라서 $f = g = e = 1 - 1 = 0$. $\square$