$a,b>0\ \ 1 \geqq r>0$, $Z=\left\{-\sqrt{\frac{a}{br}}, 0, \sqrt{\frac{b}{ar}}\right\}$, $f(-\sqrt{\frac{a}{br}})=\frac{br}{a+b}$, $f(0)=1-r$,

$f(\sqrt{\frac{b}{ar}})=\frac{ar}{a+b}$이라고 하자.

$$\sum_{k\in Z} f(k)=f(-\sqrt{\frac{a}{br}})+f(0)+f(\sqrt{\frac{b}{ar}})=\frac{br}{a+b}+(1-r)+\frac{ar}{a+b}=1$$

이므로, f는 pdf. 또 f는

$$E(Z)=\sum_{k\in Z} kf(k)=(-\sqrt{\frac{a}{br}})f(-\sqrt{\frac{a}{br}})+0f(0)+\sqrt{\frac{b}{ar}}\,f(\sqrt{\frac{b}{ar}})=\frac{-\sqrt{abr}}{(a+b)}+0+\frac{\sqrt{abr}}{(a+b)}=0$$

$$E(Z^2)=\sum_{k\in Z} k^2f(k)=(-\sqrt{\frac{a}{br}})^2f(\sqrt{\frac{a}{br}})+0f(0)+(\sqrt{\frac{a}{br}})^2f(\sqrt{\frac{b}{ar}})=\frac{a}{a+b}+0+\frac{b}{a+b}=1$$

를 만족한다. 만일 f가 $E(Z^3)=x, E(Z^4)=y$까지 만족하게 하는 적절한 a,b,r을 찾을 수 있다면 증명이 끝난다. $E(Z^3)=x, E(Z^4)=y$가 성립한다고 하자.

$$x=E(Z^3)=\sum_{k\in Z} k^3f(k)=(-\sqrt{\frac{a}{br}})^3f(\sqrt{\frac{a}{br}})+0f(0)+(\sqrt{\frac{a}{br}})^3f(\sqrt{\frac{b}{ar}})$$

$$=\frac{-a\sqrt{a}}{(a+b)\sqrt{br}}+\frac{b\sqrt{b}}{(a+b)\sqrt{ar}}=\frac{b^2-a^2}{(a+b)\sqrt{abr}}=\frac{b-a}{\sqrt{abr}}=(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}})\frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$y=E(Z^4)=\sum_{k\in Z} k^4f(k)=(-\sqrt{\frac{a}{br}})^4f(\sqrt{\frac{a}{br}})+0f(0)+(\sqrt{\frac{a}{br}})^4f(\sqrt{\frac{b}{ar}})$$

$$=\frac{a^2}{(a+b)br}+\frac{b^2}{(a+b)ar}=\frac{a^3+b^3}{(a+b)abr}=\frac{a^2-ab+b^2}{abr}=(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a})\frac{1}{r}+\frac{1}{r}=x^2+\frac{1}{r}$$

조건에 의하면 $y-x^2 \geqq 1$이고, $1 \geqq r=\frac{1}{y-x^2}>0$. $\sqrt{\frac{a}{b}}=k(>0)$로 놓으면,

$$(k-\frac{1}{k})\frac{1}{\sqrt{r}}=x \Leftrightarrow \sqrt{r}\,k^2-x\sqrt{r}\,k-1=0 \Leftrightarrow k=\frac{x\sqrt{r}\pm\sqrt{x^2r+4\sqrt{r}}}{2\sqrt{r}}$$

$$k=\frac{x\sqrt{r}+\sqrt{x^2r+4\sqrt{r}}}{2\sqrt{r}}(>0).$$

그러므로 $a=(\frac{x\sqrt{r}+\sqrt{x^2r+4\sqrt{r}}}{2\sqrt{r}})^2(>0), b=1(>0)$로 a,b를 고르면, a,b,r은 $E(Z^3)=x, E(Z^4)=y$를 만족함을 알 수 있다. 따라서 이렇게 만들어진 f는 문제의 조건을 모두 만족하는 pdf이다.