POW 2013-11 Solution 20130716 황성호 (무학과)

1. Problem

Determine all polynomials $P(z)$ with integer coefficients such that, for any complex number z with $|z|=1, |P(z)| \le 2$

2. Proof of Problem

k개의 정수$a_{r_j} \neq 0$에 대하여 $P = \sum_{j=1}^{k} a_{r_j} x^{r_j}$라고 하자. P가 주어진 조건을 만족하기 위한 필요 충분 조건은 $\sum_{j=1}^{k} |a_{r_j}| \le 2$인 것이다. 만일 $\sum_{j=1}^{k} |a_{r_j}| \le 2$라면

$$|P(z)| = \left|\sum_{j=1}^{k} a_{r_j} z^{r_j}\right| \le \sum_{j=1}^{k} \left|a_{r_j} z^{r_j}\right| = \sum_{j=1}^{k} |a_{r_j}||z|^{r_j} = \sum_{j=1}^{k} |a_{r_j}| \le 2$$

이제 P가 주어진 조건을 만족하는 정수 계수 다항식이라고 가정하자. $|z|=1$이면 $z = \cos\theta + isin\theta$로 쓸 수 있고, 이를 P에 대입하면

$$\begin{aligned}
P(z) &= \sum_{j=1}^{k} a_{r_j} [\cos(\theta) + isin(\theta)]^{r_j} \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_{r_j} [\cos(r_j\theta) + isin(r_j\theta)] \\
&= [\sum_{j=1}^{k} a_{r_j} \cos(r_j\theta)] + i[\sum_{j=1}^{k} a_{r_j} \sin(r_j\theta)] \\
|P(z)| &= \sqrt{[\sum_{j=1}^{k} a_{r_j} \cos(r_j\theta)]^2 + [\sum_{j=1}^{k} a_{r_j} \sin(r_j\theta)]^2} \\
&= \sqrt{\sum_{1 \le j_1, j_2 \le k} a_{r_{j_1}} a_{r_{j_2}} [\cos(j_1\theta)\cos(j_2\theta) + \sin(j_1\theta)\sin(j_2\theta)]} \\
&= \sqrt{\sum_{1 \le j_1, j_2 \le k} a_{r_{j_1}} a_{r_{j_2}} \cos[(j_1 - j_2)\theta]} \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{k} a_{r_j}^2 + \sum_{1 \le j_1 \neq j_2 \le k} a_{r_{j_1}} a_{r_{j_2}} \cos[(j_1 - j_2)\theta]} \cdots (*)
\end{aligned}$$

를 얻는다. 여기서

$$\int_0^{2\pi} \sum_{1 \le j_1 \neq j_2 \le k} a_{r_{j_1}} a_{r_{j_2}} \cos[(j_1 - j_2)\theta] d\theta = \left[\sum_{1 \le j_1 \neq j_2 \le k} \frac{a_{r_{j_1}} a_{r_{j_2}}}{j_1 - j_2} sin[(j_1 - j_2)\theta]\right]_0^{2\pi} = 0$$

이므로

$$\sum_{1 \le j_1 \neq j_2 \le k} a_{j_1} a_{j_2} \cos[(j_1 - j_2)\theta_0] = 0$$

인 θ_0가 $[0, 2\pi]$에 존재한다. $z_0 = \cos\theta_0 + isin\theta_0$를 대입하면

$$|P(z_0)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} a_{r_j}^2}, \ |z_0| = 1$$

여기서 $k<5$가 되어야 함을 알 수 있다. $k\geq 2$인 경우 $|a_{r_j}|\geq 2$인 a_{r_j}가 있다면

$|P(z_0)|\geq \sqrt{2^2+(k-1)}>2$

로 모순. 따라서 각각의 $1\leq j\leq k$에 대하여$|a_{r_j}|=1$이다.

(1) $k=1$인 경우. $z=1$을 대입하면 $|a_{r_1}|=|P(1)|\leq 2$

(2) $k=2$인 경우. $|a_{r_1}|+|a_{r_2}|=2$

(3) $k=3$인 경우. (*)에 $|a_{r_j}|=1$를 넣어 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$|P(z)|=\sqrt{3+2(a_{r_1}a_{r_2}+a_{r_2}a_{r_3})\cos\theta+2a_{r_1}a_{r_3}\cos 2\theta}$.

$a_{r_1}=a_{r_2}=a_{r_3}$: $\theta=0$을 대입하면 $|P(z)|=\sqrt{3+4+2}>2$

$a_{r_1}=a_{r_2}=-a_{r_3}$: $\theta=\pi$를 대입하면 $|P(z)|=\sqrt{3+0+2}>2$

$a_{r_1}=-a_{r_2}=a_{r_3}$: $\theta=\pi$를 대입하면 $|P(z)|=\sqrt{3+4-2}>2$

$a_{r_1}=-a_{r_2}=-a_{r_3}$: $\theta=\pi$를 대입하면 $|P(z)|=\sqrt{3+0+2}>2$

따라서 $k\neq 3$

(4) $k=4$인 경우. 마찬가지로 (*)에 $|a_{r_j}|=1$를 넣어 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$|P(z)|=\sqrt{4+\sum_{1\leq j_1\neq j_2\leq 4}a_{r_{j_1}}a_{r_{j_2}}\cos[(j_1-j_2)\theta]}$

$$\sum_{1\leq j_1\neq j_2\leq 4}a_{r_{j_1}}a_{r_{j_2}}\cos[(j_1-j_2)\theta]=$$
$$2(a_{r_1}a_{r_2}+a_{r_2}a_{r_3}+a_{r_3}a_{r_4})\cos\theta+2(a_{r_1}a_{r_3}+a_{r_2}a_{r_4})\cos 2\theta+2a_{r_1}a_{r_4}\cos 3\theta$$

는 $\cos 3\theta$의 계수가 0이 아니므로 상수함수는 아니다. 그리고 앞에서 보았듯이

$$\int_0^{2\pi}\sum_{1\leq j_1\neq j_2\leq 4}a_{r_{j_1}}a_{r_{j_2}}\cos[(j_1-j_2)\theta]d\theta=0$$

이므로

$$\sum_{1\leq j_1\neq j_2\leq 4}a_{r_{j_1}}a_{r_{j_2}}\cos[(j_1-j_2)\theta_0]>0$$

인 θ_0가 존재할 것이다. 그럼 $z_0=\cos\theta_0+isin\theta_0$에 대하여

$|P(z)|>2$

따라서 $k\neq 4$

(1), (2), (3), (4)에서 $\sum_{j=1}^{k}|a_{r_j}|\leq 2$가 증명되었다.

따라서 가능한 정계수 다항식은 $0,\pm x^i,\pm 2x^i,\pm x^i\pm x^j(i,j\in Z_0^+)$의 경우가 있다.