KAIST POW 2013-06

KAIST 13학번
박훈민(Hun-Min, Park)
95phm@kaist.ac.kr

Problem. (KAIST POW 2013-06).
Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function with $f(0) = 0$ and $0 < f'(x) \leq 1$. Prove that

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq \int_0^1 f(x)^3 dx$$

Proof.
$I(t) = \left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 - \int_0^t f(x)^3 dx$, $F(x) = \int_0^t f(x)dx$라고 하자. 우선

$$I'(t) = 2F(t)f(t) - f(t)^3 = 2f(t)\left(F(t) - \frac{1}{2}f(t)^2\right)$$

이다. 여기서 $f' > 0$이므로 $f(t) \geq f(0) = 0$. 한편 $F(t) - \frac{1}{2}f(t)^2$의 부호는 다음 lemma를 이용하여 확인할 수 있다.

Lemma. $t \in [0,1]$에서 $F(t) - \frac{1}{2}f(t)^2$는 증가한다.
Proof of lemma.

$$\frac{d}{dx}\left(F(t) - \frac{1}{2}f(t)^2\right) = f(t)(1 - f'(t))$$

$f' > 0$이므로 $f(t) \geq f(0) = 0$이고 문제 조건에 의해 $f'(t) < 1$, 따라서 위 식은 항상 ≥ 0이 되고, 곧 $F(t) - \frac{1}{2}f(t)^2$는 증가 함수가 된다. △

위 lemma에 의해서

$$F(t) - \frac{1}{2}f(t)^2 \geq F(0) - \frac{1}{2}f(0)^2 = 0$$

이 성립한다. 따라서

$$I'(t) = 2f(t)\left(F(t) - \frac{1}{2}f(t)^2\right) \geq 0$$

$$\therefore I(t) = \left(\int_0^t f(x)dx\right)^2 - \int_0^t f(x)^3 dx \geq I(0) = 0$$

여기에 $t = 1$을 대입하면

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq \int_0^1 f(x)^3 dx$$

를 얻는다. □