Problem Of Week 2013-03 (2013.03.22)

problem.(Hyperbolic Cosine) 가 양의 실수이고 m이 양의 정수이다. 이 때 $\cosh mt$와 $\cosh(m+1)t$가 모두 유리수라면 $\cosh t$ 역시 유리수임을 보여라.

(1)홍혁표
(2)2013학번
(3)hphong@kaist.ac.kr

풀이)

$\cosh\ t - \sinh^2 t = (\frac{e^t + e^{-t}}{2})^2 - (\frac{e^t - e^{-t}}{2})^2 = 1$이다.

$\therefore \sinh t = \quad \cosh^2 t - 1\ (\because \sinh t > 0,\ when\ \ t > 0)$

Lemma 1. $\cosh x$**가 유리수 이면** $\cosh mx$**(**m**은 양의 정수)도 유리수이다.**

Proof) $\cosh x$가 유리수이면 $m=1$일때는 당연히 $\cosh mx$가 유리수 이다.

$m=2$일 때는 $\cos 2x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = 2(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - 1 = 2\cosh^2 x - 1$이므로 유리수이다.

이제 $m=k, k+1$ (k는 2이상의 정수)일 때 $\cosh mx$가 유리수라 가정하자.

$\cosh(k+2)x = 2\cosh(k+1)x \cdot \cosh x - \cosh kx$이다. 여기서 우변의 $\cosh(k+1)x$, $\cosh x$, $\cosh kx$가 모두 유리수이므로 $\cosh(k+2)x$ 역시 유리수이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해서 $\cosh x$가 유리수이면 모든 양의 정수 m에 대해서 $\cosh mx$가 유리수이다.

$\cosh t = \cosh((m+1)t - mt)$

$= \cosh(m+1)t \cosh mt - \sinh(m+1)t \sinh mt$

$= \cosh(m+1)t \cosh mt - \sqrt{\cosh^2(m+1)t - 1}\ \sqrt{\cosh^2 mt - 1}$

여기서 $\cosh(m+1)t = p, \cosh mt = q$ 라 하자. 당연히 p,q 이다. (Q는 유리수 집합)

$\cosh t = pq - \sqrt{p^2-1}\ \sqrt{q^2-1}$

$\Rightarrow (p^2-1)(q^2-1) = (pq - \cosh t)^2 = p^2q^2 - 2pq\cosh t + \cosh^2 t$

$p^2q^2 - (p^2+q^2) + 1 = p^2q^2 - 2pq\cosh t + \cosh^2 t$

$\Rightarrow 1 - (p^2+q^2) = -2pq\cosh t + \cosh^2 t$ --- (A)

$\cosh(m+1)^2 t = r,\ \cosh(m+2)mt = s$라 하자. 그러면 $\cosh(m+1)t$와 $\cosh mt$가 유리수이므로 $(m+1)^2 t = (m+1)\times(m+1)t$와 $(m+2)mt = (m+2)\times mt$에서 **Lemma 1.**에 의해서 $r, s \in Q$이다.

위 식은 $m+1)t$와 mt의 차가 t이기 때문에 유도된 식이다. 따라서 다음과 같이 $(m\ +2m+1)t$와 $(m^2+2m)t$의 차이 역시 t이므로 다음과 같은 식이 유도된다.

$\cosh t=\cos t((m+1)^2t-(m+2)mt)$에서

$=\cosh(m+1)^2t\cosh(m+2)mt-\quad\cosh^2(m+1)^2t-1\ \sqrt{\cosh^2(m+2)mt-1}$

$=rs-\sqrt{r^2-1}\ \sqrt{s^2-1}$

$\therefore\ (r^2-1)(s^2-1)=(rs-\cosh t)^2$

$\therefore\ 1-(r^2+s^2)=-2rs\cosh t+\cosh^2 t$ --- (B)

(A), (B)식을 다시 써보면

$$1-(p^2+q^2)=-2pq\cosh t+\cosh^2 t\ \ ---(\mathrm{A})$$
$$1-(\mathrm{r}^2+\mathrm{s}^2)=-2\mathrm{rs}\cosh t+\cosh^2 t\ \ ---(\mathrm{B})$$

(A)식에서 (B)식을 빼면

$(r^2+s^2)-(p^2+q^2)=2\cosh t(rs-pq)$

$\therefore\ \cosh t=\dfrac{(r^2+s^2)-(p^2+q^2)}{2(rs-pq)}$ 이다. $(p,q,r,s\in Q$ 이므로)

($t>0,m\geq 1$이므로 $(m+1)^2t>(m+1)t,\ (m+2)mt>mt$이고 $\cosh t$는 $t>0$에서 증가함수 이므로 $r>p,\ s>q$이다. 따라서 $rs>pq$이므로 $rs-pq\neq 0$이다. 즉, 분모는 0이 되지 않는다.)