POW 2012-5 Iterative geometric mean

KAIST 11 Kim Tae Ho

(pf) $b_i = \ln a_i$라 하자. $b_i = \ln a_i (i \in \{1,2,3,\cdots,k\})$이고, $b_{n+k+1} = \dfrac{b_{n+1} + \cdots + b_{n+k}}{k}$인 수열 b_i가 수렴함을 보이면 된다.

$f(x) = x^k - \dfrac{1}{k}x^{k-1} - \dfrac{1}{k}x^{k-2} - \cdots - \dfrac{1}{k} = 0$의 근을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$라 하자. $x \neq 1$일 때, $f(x) = \dfrac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{x-1}$인데, 이 방정식에 중근이 존재하면, $kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1$이 $(x-\alpha)^2 (\alpha \neq 1)$꼴의 인수를 가지거나, $(x-1)^3$을 인수로 가진다. $g(x) = kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1$이라 하면 $g'(x) = k(k+1)x^{k-1}(x-1)$이므로 $g(\alpha) = g'(\alpha) = 0$인 α는 $0, 1$이 가능한데 $g(0) = 1$이므로 불가능. 따라서 $g(x)$는 $(x-1)^3$을 인수로 가져야 한다. 그런데 $g''(x) = (k+1)k(k-1)x^{k-2}(x-1) + (k+1)kx^{k-1}$이므로 $g''(1) \neq 0$이므로 $(x-1)^3$을 인수로 갖지 않는다. 따라서 이 방정식은 중근을 갖지 않으므로 Homogeneous linear relation에 의해 $b_n = c_1\alpha_1^{n-1} + c_2\alpha_2^{n-1} + \cdots + c_k\alpha_k^{n-1}$라 할 수 있다.($c_i$는 상수).

1도 $f(x) = 0$의 근이므로 $a_k = 1$이라 하자. 이제 모든 $i = 1, 2, \cdots, k-1$에 대해 $|\alpha_i| < 1$임을 보이자. $|\alpha_i| > 1$이면 $|\alpha_i|^k = \dfrac{1}{k}|\alpha_i^{k-1} + \alpha_i^{k-2} + \cdots + 1| \leq \dfrac{1}{k}(|\alpha_i|^{k-1} + \cdots + |\alpha_i| + 1)(*)$이다. 그런데 $|\alpha_i| > 1$이므로 $|\alpha_i|^k > |a_i|^r (r = 1,2,3,\cdots,k-1)$이다. 그러면 $|a_i|^k > \dfrac{1}{k}(|a_i|^{k-1} + \cdots + |\alpha_i| + 1)$이므로 모순. 따라서 $|\alpha_i| \leq 1$이다. $|\alpha_i| = 1$일 수 있다고 하자. α_i가 실수이면 $1, -1$인데, $\alpha_k = 1$이고 $f(-1) \neq 0$이므로 불가능. α_i가 실수가 아닌 복소수인 경우를 고려해보자. 실수가 아닌 복소수 α, β에 대해서 $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$일 조건은 $\alpha\overline{\beta}$가 실수인 것이다. 이를 이용하면, $(*)$의 부등식에서 등호가 모두 성립하는 경우로 α_i가 실수이므로 모순. 따라서 $|\alpha_i| < 1$.

$\alpha_i = r(\cos\theta + i\sin\theta), 0 < r < 1$인 r, θ존재. $Re(c_i\alpha_i^n) = r^n \cos n\theta \cdot Re(c_i) - r^n \sin n\theta Im(c_i)$이 성립하므로 $\lim_{n\to\infty} Re(c_i\alpha_i^n) = 0$. $\therefore$ $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} Re(c_1\alpha_1^{n-1} + c_2\alpha_2^{n-1} + \cdots + c_k\alpha_k^{n-1}) = c_k (\because$ b_n이 항상 실수이므로 $b_n = Re(b_n))$. 따라서 b_n은 수렴.

수렴 값을 구하기 위해 다음 수열을 생각해보자.

$$s_m = b_{m+1} + 2b_{m+2} + 3b_{m+3} + \cdots + kb_{m+k}$$

모든 음이 아닌 정수 m에 대해서 $s_m = s_{m+1}$임을 알 수 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} s_m = s_0$이다. $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$라 하면 $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{k(k+1)}{2}\beta = s_0$. $\beta = \dfrac{1}{k(k+2)}s_0$이므로 문제의 수렴 값은 $e^\beta = e^{\frac{2}{k(k+1)}s_0} = e^{\frac{2}{k(k+1)}\{\ln a_1 + 2\ln a_2 + \cdots + k\ln a_k\}} = (a_1 a_2^2 a_3^3 \cdots a_k^k)^{\frac{2}{k(k+1)}}$이다.