POW 2011-22 Seoul Subway Line 2

09학번 강동엽

Lemma (Generalization).

실수 수열 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$이 존재하여, $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq 0$이라 하자. 그리고 $1 \leqq i \leqq n$에 대해서, $a_{n+i} = a_n$이라 하자.
이 때 어떤 $1 \leqq k \leqq n$이 존재하여, $b_i = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+i-1}$이라 정의할 때, $b_i \geqq 0$을 만족한다. $(1 \leqq i \leqq n)$

(Proof of Lemma)

p를 $\sum_{i=1}^{p} a_i$가 최소가 되는 p라 하자. $(1 \leqq p \leqq n)$ 만약 $\sum_{i=1}^{p} a_i \geqq 0$이면, $k=1$로 두면 충분하다. 따라서 $\sum_{i=1}^{p} a_i < 0$이라고 가정할 수 있다. $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq 0$이므로 $p < n$이라고 가정할 수 있다. ($\because \sum_{i=1}^{n} a_i \geqq 0$)

이제 $k = p+1$으로 설정하면 충분함을 보이자.
$1 \leqq j \leqq n-p$에 대해서, $b_j \geqq 0$이다. 만약 아니라고 하자. 그렇다면 $1 \leqq j \leqq n-p$이 존재하여 $b_j < 0$이다. 이 경우 $\sum_{i=1}^{p} a_i > \sum_{i=1}^{p+j} a_i = \sum_{i=1}^{p} a_i + b_j$를 만족하게 되므로, p의 정의에 모순이다.

$n-p+1 \leqq j \leqq n$에 대해서 $b_j = \sum_{i=p+1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{j-(n-p)} a_i \geqq \sum_{i=p+1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \geqq 0$을 만족한다. ($\because \sum_{i=1}^{p} a_i \leqq \sum_{i=1}^{k} a_i$ for all $1 \leqq k \leqq n$)

따라서 임의의 $1 \leqq j \leqq n$에 대해서 $b_j \geqq 0$이므로, $k = p+1$로 설정하면 된다.

■

Station 개수를 n개라 할 때, i번째 station에서 얻는 돈을 a_i, i번째와 $i+1$번째 station 사이의 segment of seoul subway line에서 잃는 돈을 b_i라 할 때 ($n+1$번째 station = 1번째 station으로 가정) 수열 $a_1, -b_1, a_2, -b_2, \ldots, a_n, -b_n$에 대해서 위 Lemma를 적용하여 k를 구하면 k는 항상 홀수이고, $(k+1)/2$번째 station에서 출발하면 된다.