POW 2011-21 Zeros

김범수

Solution of POW2011-21

Γ 함수의 성질에 의해 F_n이 정의된 곳에서

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-2)^m(2n-m)!}{m!(n-m)!} x(x-1)\cdots(x-m+1) \tag{1}$$

이다. (단, m=0일 때 $x\cdots$ 부분은 1이다.) F_n의 해는 이 다항식의 해 중 F_n이 정의되지않은 곳을 빼면 되므로 이제 F_n을 다항식으로 생각해도 상관없다.
작은 n들에 대해 살펴보면 $F_0(x) = 1$, $F_1(x) = -2(x-1)$, $F_2(x) = 4(x-1)(x-3)$ 임을 알 수 있다.
실제로

$$F_n(x) = (-2)^n(x-1)(x-3)\cdots(x-(2n-1)) \tag{2}$$

가 됨을 보이자. $n \geq 1$일 때,

$$F_n(x) = -2F_{n-1}(x)(x-(2n-1)) \tag{3}$$

임을 보이면 충분하다.
(3)은 조립제법을 응용해서 쉽게 증명할 수 있다.
$y_0 = 1$, $y_m = x(x-1)\cdots(x-(m-1))$, $(m \geq 1)$ 로 두면 $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ 은 각각 degree가 m인 $\mathbb{R}[x]$의 basis이고 $y_m = y_{m-1}(y_1 - (m-1))$을 만족한다. 그리고 (1)에서 y_m의 계수를 c_m^n이라 하면 $F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m^n y_m$이다.
임의의 다항식 $p(x) = a_k y_k + \cdots + a_1 y_1 + a_0 y_0$ 를 $y_1 - \alpha$로 나누는 과정은,
$m \geq 1$일때 임의의 상수 a에 대해 $ay_m - ay_{m-1}(y_1 - \alpha) = ay_{m-1}(\alpha - (m-1))$ 이므로 다음과 같이 된다.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & (\alpha-(k-1))b_k & (\alpha-(k-2))b_{k-1} & \cdots & (\alpha-1)b_2 & \alpha b_1 \\ \hline & a_k = b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \cdots & b_1 & r \end{array}$$

(단, $b_m = a_m + (\alpha - m)b_{m+1}$, $r = a_0 + \alpha b_1$은 나머지.)
$\Rightarrow p(x)= (y_1-\alpha)(b_k y_{k-1} + b_{k-1}y_{k-2}\cdots + b_2 y_1 + b_1 y_0) + r$.
우리가 보이고 싶은 것은 (3)이므로,

$$\begin{array}{c|ccccc} & c_n^n & c_{n-1}^n & \cdots & c_1^n & c_0^n \\ 2n-1 & & (2n-1-(n-1))(-2)c_{n-1}^{n-1} & \cdots & (2n-1-1)(-2)c_1^{n-1} & (2n-1)(-2)c_0^{n-1} \\ \hline & (-2)c_{n-1}^{n-1} & (-2)c_{n-2}^{n-1} & \cdots & (-2)c_0^{n-1} & 0 \end{array}$$

, 즉 $F_n(x)$를 $(y_1 - (2n-1))$로 나누었을 때,
①$c_n^n = (-2)c_{n-1}^{n-1}$, ②$k \geq 1$에 대해 $c_k^n + (2n-1-k)(-2)c_k^{n-1} = (-2)c_{k-1}^{n-1}$, ③나머지가 0 임을 보이면 된다.

먼저, $c_n^n = (-2)^n = (-2)c_{n-1}^{n-1}$ 이다.
그리고 $k \geq 1$에 대해,

$$\begin{aligned} c_k^n + (2n-1-k)(-2)c_k^{n-1} &= \frac{(-2)^k(2n-k)!}{k!(n-k)!} + (2n-1-k)(-2)\frac{(-2)^k(2n-2-k)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(-2)^k(2n-1-k)!}{k!(n-k)!}((2n-k)-2(n-k)) \\ &= \frac{(-2)^k(2n-1-k)!}{k!(n-k)!} \times k \\ &= \frac{(-2)^k(2n-1-k)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= (-2)c_{k-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

이다. 마지막으로 나머지는

$$c_0^n + (2n-1)(-2)c_0^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!} - 2(2n-1)\frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!} - \frac{2n(2n-1)!}{n(n-1)!} = 0.$$

따라서 $F_n(x) = (-2)^n(x-1)(x-3)\cdots(x-(2n-1))$ 이고 이 다항식의 해는 $2k-1$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 이다. 그런데 원래의 F_n을 보면 Γ 함수가 양이 아닌 정수에서 정의되지 않으므로 F_n의 해집합은 $\{2k-1 : \frac{n}{2} < k \leq n,\ k$는 정수$\}$가 된다. $\square$