<Problem of the Week> 2008 수리과학과 박승균

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n d(\frac{x}{2^n}) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d(2^n x)$ 라고 하자. 그리고 $\frac{m}{2^n}$ (m,n은 자연수) 꼴의 수를 2-adic number 라고 하는 것을 알아두자. 우선 다음 Lemma를 증명하고 문제를 푸는데 이용한다.

Lemma 1) r이 임의의 양의 실수이다. r에 수렴하는 양수인 2-adic number의 수열 $\{a_k\}$ 가 존재한다.

proof) $a_k = \frac{\lfloor r2^k \rfloor}{2^k}$ 로 잡는다.($\lfloor x \rfloor$ 는 x를 넘지 않는 최대 정수).

그러면, $0 < r - a_k = \frac{r2^k - \lfloor r2^k \rfloor}{2^k} < \frac{1}{2^k}$ 이므로 $\lim_{k\to\infty} a_k = r$.

Lemma 2) $d(x)$ 에 대하여 다음 세 가지 성질이 성립한다.

- $d(x)$는 R에서 연속함수이다.
- $d(x) \le \min(x^2,1)$
- $d(-x) = d(x)$

proof)
임의의 실수 x에 대하여 어떤 정수 n이 존재하여 $n \le x < n+1$ 라고 할 수 있다.

$i)$ $n \le x < n + \frac{1}{2}$ 일 때

$d(x) = (x-n)^2$ 이다. $0 \le x-n \le \min(1,x)$ 이므로 $d(x) \le \min(1,x^2)$.

$-n-\frac{1}{2} < -x \le -n$ 이므로 $d(-x) = (x-n)^2 = d(x)$.이제 $d(x)$의 연속성을 보이자.

임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $\delta = \min(\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2})$로 잡는다.

$|x-y| < \delta$ 이면 $x, y < n+1$ 이므로 $x+y-2n < 2$ 이다. 따라서

$|d(x) - d(y)| = |x-y|\,|x+y-2n| < \frac{\varepsilon}{2} \times 2 = \varepsilon$ 가 성립한다.

$ii)$ $n + \frac{1}{2} \le x < n+1$ 일 때

$d(x) = (n+1-x)^2$ 이다. $0 \le n+1-x \le \min(1,x)$ 이므로 $d(x) \le \min(1,x^2)$.

$-n-1 < -x \le -n-\frac{1}{2}$ 이므로 $d(-x) = (n+1-x)^2 = d(x)$.

이제 $d(x)$의 연속성을 증명하자.

임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2})$ 로 잡는다.

$|x-y| < \delta$ 이면 $n < x,y$ 이므로 $2n+2-(x+y) < 2$ 이다. 따라서

$|d(x)-d(y)| = |x-y|\,|2n+2-(x+y)| < \frac{\varepsilon}{2} \times 2 = \varepsilon$ 가 성립한다.

이로써 $d(x)$에 관한 위 3가지 사실이 증명되었다.

Lemma 3) $f(x)$는 R에서 연속함수이다.

proof) 위의 Lemma2의 첫 번째, 두 번째 성질을 이용한다.

a가 임의의 실수일 때, $\forall x \in [-a,a]$에 대해서 $2^n d(\frac{x}{2^n}) \le \frac{a^2}{2^n}$ 이다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{2^n} = a^2$ 로 converge 하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n d(\frac{x}{2^n})$는 $[-a,a]$에서 uniformly converge 한다. 그리고 $2^n d(\frac{x}{2^n})$가 각각 $[-a,a]$에서 연속이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n d(\frac{x}{2^n})$도 $[-a,a]$에서 연속함수이다. a가 임의의 실수이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n d(\frac{x}{2^n})$는 R에서 연속함수이다.

$2^{-n} d(2^n x) \le 2^{-n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$ 로 converge 하므로 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d(2^n x)$는 R에서 uniformly converge 한다. 그리고 $2^{-n} d(2^n x)$가 각각 R에서 연속이므로 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d(2^n x)$도 R에서 연속함수이다. 따라서 $f(x)$도 R에서 연속함수이다.

Lemma 4) $f(x)$는 모든 양수인 2-adic number x에 대해서 $f(x) = x$를 만족한다.

proof) 일단 모든 자연수에 대해서 $f(x) = x$임을 보이자.

$f(2x) = 2f(x)$ 임을 수식을 통해 쉽게 확인할 수 있다.

다음 Statement를 수학적귀납법으로 증명하면 된다.

Statement: $[2^{m-1}, 2^m]$에 속하는 모든 자연수에 대해서 $f(x) = x$이다.

$i) m=1$ 일 때

일단 $f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}2^n f(\frac{1}{2^n})+\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}f(2^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$ 이다.

그리고 $f(2)=2f(1)=2$ 이므로 증명 끝.

$ii) m \le k$일 때 성립하면 $m=k+1$ 일 때 성립한다.

$[2^k, 2^{k+1}]$에 속하는 모든 자연수는 $2^k+a\,(0 \le a \le 2^k,\ a \in N)$ 꼴로 표현된다.

$n \ge k+2$ 일 때, $0<\frac{2^k+a}{2^n}<\frac{2^k+2^k}{2^n}=\frac{1}{2^{n-k-1}}<\frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 $d(\frac{2^k+a}{2^n})=(\frac{2^k+a}{2^n})^2$ 이다.

$n=k+1$ 일 때, $\frac{1}{2}<\frac{2^k+a}{2^{k+1}}\le 1$ 이므로 $d(\frac{2^k+a}{2^{k+1}})=(\frac{2^k-a}{2^{k+1}})^2$

$n \le k$ 일 때, $d(\frac{2^k+a}{2^n})=d(2^{k-n}+\frac{a}{2^n})=d(\frac{a}{2^n})$ 임을 알아두자.

$$f(2^k+a)=\sum_{n=k+2}^{\infty}2^n d(\frac{2^k+a}{2^n})+2^{k+1}d(\frac{2^k+a}{2^{k+1}})+\sum_{n=1}^{k}2^n d(\frac{2^k+a}{2^n})$$

$$=\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{(2^k+a)^2}{2^n}+\frac{(2^k-a)^2}{2^{k+1}}+\sum_{n=1}^{k}2^n d(\frac{a}{2^n})$$

$$=2^k+\frac{a^2}{2^k}+\sum_{n=1}^{k}2^n d(\frac{a}{2^n})$$

… ①

Induction hypothesis에 의해서 $f(a)=a$이다. 이것을 풀어서 써보면,

$$f(a)=\sum_{n=1}^{k}2^n d(\frac{a}{2^n})+\sum_{n=k+1}^{\infty}2^n d(\frac{a}{2^n})$$

여기서 $n \ge k+1$ 일 때, $0<\frac{a}{2^n}<\frac{1}{2}$ 이므로 $d(\frac{a}{2^n})=(\frac{a}{2^n})^2$.

위 식에 대입하면, $\sum_{n=1}^{k}2^n d(\frac{a}{2^n})=a-\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{a^2}{2^n}=a-\frac{a^2}{2^k}$ 을 얻는다. 이를 다시 ①에 대입하면, $f(2^k+a)=2^k+a$ 이다. 이로써 Induction에 의해 Statement가 증명되었다.

위의 증명에 의해 모든 자연수에 대해 $f(x)=x$이다.

$f(2^n x) = 2f(2^{n-1}x) = \ldots = 2^n f(x)$ 이므로

n, m이 자연수 일 때 $f(\frac{m}{2^n}) = \frac{1}{2^n} f(m) = \frac{m}{2^n}$이다. 따라서 모든 양의 2-adic number x 에 대해서 $f(x) = x$가 성립한다.

이제 위의 Lemma를 이용하여 $[0, \infty]$에서 $f(x) = x$임을 보이자.
우선 임의의 양의 실수 r을 생각하자. r에 수렴하는 양의 2-adic number의 수열 $\{a_k\}$가 존재한다. 그리고 $f(a_k) = a_k$이다. $f(x)$는 R에서 연속함수이므로
$f(r) = \lim_{k \to \infty} f(a_k) = \lim_{k \to \infty} a_k = r$ 이 성립한다. 따라서 $[0, \infty]$에서 $f(x) = x$.
Lemma2에서 $d(-x) = d(x)$ 였으므로 $f(-x) = f(x)$이다. 따라서 R에서 $f(x) = |x|$ 임을 알 수 있다.

답: $f(x) = |x|$