2011-16 Odd Sets with Even Intersection

전산학과 09 강동엽

먼저, 편의상 $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{1, 2, \ldots, m\}$로 표기하기로 한다.
결국, $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $Y = \{1, 2, \ldots, m\}$이라 할 때, $G = (X \cup Y, E)$ such that $E = \{(A_i, j) \mid j \in A_i \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$로 두면, 집합과 원소의 관계를 일종의 bipartite graph로 표현할 수 있다. 즉 각 $1 \leq i \leq n$에 대해서 서로 distinct한 $a_i \in A_i$를 뽑는 것은, 위 bipartite graph가 X를 덮는 matching을 가짐과 동치이다. 그리고 그에 관한 유명한, 잘 알려진 정리가 있다.

> **Theorem (Hall's Theorem)**
> Bipartite graph $G = (X \cup Y, E)$에 대해서, G가 X를 덮는 matching을 가짐은 임의의 $S \subseteq X$에 대해서, $|S| \leq |N(S)|$를 만족하는 것이다.
> (i.e. $N(S) = \{y \in Y \mid \exists x \in S \ s.t. \ xy \in E\}$)

귀류법을 이용하자. X를 덮는 matching이 존재하지 않는다고 가정하자. 따라서 Hall's theorem에 의해서 $S \subseteq X$가 존재하여 $|S| > |N(S)|$를 만족한다. 적어도 $S = \varnothing$이 될 수는 없으므로 ($\because |S| = 0 = |N(S)|$) $|S| \geq 1$이다.
편의상, $S = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\} \subseteq \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, $N(S) = \{c_1, c_2, \ldots, c_l\}$로 간주하자. 그리고 아래와 같은 인접행렬 $C \in R^{k \times l}$을 만들자.

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & c_j \in B_i \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$|S| > |N(S)|$에서 $k > l$이므로, C의 오른쪽 끝부분에 $k - l$개의 zero column vector를 붙여주면, $C \in R^{k \times k}$인 행렬이 된다. C는 zero column vector를 가지므로, $\det(C) = 0$임이 자명하다. 이제 문제에서 주어진 조건을 이용해서 $\det(C) \neq 0$임을 보여서 모순을 유도하려 한다.

Lemma. $\det(CC^T) \neq 0$
(Proof of Lemma)
먼저 CC^T가 대충 어떤 행렬인지 생각해보자. $1 \leq i, j \leq n$에 대해서, CC^T의 (i,j)번째 원소에는 $|B_i \cap B_j|$가 들어감을 알 수 있다. 따라서 문제의 조건에 의해서, $CC^T(i,j)$는 even ($i \neq j$인 경우), $CC^T(i,i)$는 odd임을 알 수 있다. 즉 대각선 부분은 모두 odd, 그 외의 부분은 모두 even이다.

임의의 $\{1, 2, \ldots, k\}$의 permutation π에 대해서,

$$\det(CC^T) = \sum_{\pi} sgn(\pi) \prod_{i=1}^{n} A(i, \pi(i))$$

이 됨이 잘 알려져 있다. 한편 대각선 성분을 $\prod_{i=1}^{n} A(i,\pi(i))$에서 모두 사용하지 않는 이상 무조건 이 곱은 even이다. (even인 원소를 적어도 하나 이상 곱하므로) 따라서, Trivial한 permutation $\pi=(1,2,\ldots,n)$을 제외한 permutation에 대한 위 sigma의 합의 성분은 모두 even이다. odd+even=odd이므로, $\det(CC^T)\neq 0$이다.

■

따라서 $\det(CC^T)=\det(C)^2\neq 0$이므로 $\det(C)\neq 0$이다. C는 zero column vector를 가지므로, $\det(C)=0$에서 이는 모순이다.

따라서 Hall's theorem의 조건이 성립하므로, 문제에서 주어진 집합으로 만든 bipartite graph는 X를 덮는 matching을 가진다.