<Problem of the week> 2008 수리과학과 박승균

풀이)

$f(x)$가 $[a,b]$에서 continuous 이므로 ∃M > 0 이 존재하여 $|f(x)| \le M$ 이 성립한다.

$|cg'(x)| - |g(x)f(x)| \le |g(x)f(x)+cg'(x)| \le |g(x)|$ 에서

$|g'(x)| \le \dfrac{1}{|c|}|g(x)|(|f(x)|+1) \le \dfrac{(M+1)}{|c|}|g(x)|$ 가 성립한다.

여기서 A = $\dfrac{(M+1)}{|c|}$ 로 치환하면, $|g'(x)| \le A|g(x)|$ (A는 0보다 큰 상수) 라고 할 수 있다. ⋯ ①

자연수 N을 충분히 크게 잡으면 $0 < \dfrac{(b-a)}{N} < \dfrac{1}{A}$ 가 되도록 잡을 수 있다.

이제 $g(x)$가 $\left[a, a+\dfrac{b-a}{N}\right]$ 에서 0임을 보이자. $g(x)$가 연속이므로

∃ $p \in \left[a, a+\dfrac{b-a}{N}\right]$ 가 존재하여 $|g(x)|$ 가 $x=p$ 에서 최대값을 가진다. 다음 두 경우를 나누어서 생각해보자.

(i) p = a 일 때

$|g(a)| = 0$ 이 최댓값이므로 $\forall x \in \left[a, a+\dfrac{b-a}{N}\right]$ 에 대해서 $0 \le |g(x)| \le 0$ 이다.

즉, 이 경우 $g(x)$는 $\left[a, a+\dfrac{b-a}{N}\right]$ 에서 0이다.

(ii) p > a 일 때

$\left[a, a+\dfrac{b-a}{N}\right]$에서 $g(x)$가 미분가능하므로 평균값정리를 적용한다.

$g(p)-g(a) = (p-a)g'(t)$ ($a<t<p$)

$|g(p)| = (p-a)|g'(t)|$.

여기서 $0 < p-a < \dfrac{b-a}{N} < \dfrac{1}{A}$ 이므로 $\dfrac{1}{p-a} > A > 0$ 이 성립함을 알아두자.

$|g'(t)| = \dfrac{|g(p)|}{p-a} > A|g(p)|$ 임을 알 수 있다.

그런데 ①에 의하여 $|g'(t)| \le A|g(t)|$ 가 성립하므로 $A|g(p)| < A|g(t)|$ 이고

$|g(p)| < |g(t)|$를 얻는다. 이것은 $x=p$에서 $|g(x)|$ 가 최대라는 것에 모순이다. 따라서 $p > a$ 일 수 없다.

따라서 $g(x)$는 $\left[a\,,\,a+\dfrac{b-a}{N}\right]$ 에서 0이다. 같은 방법으로 $g(x)$가

$$\left[a+\frac{b-a}{N}\,,\,a+\frac{2(b-a)}{N}\right],\left[a+\frac{2(b-a)}{N}\,,a+\frac{3(b-a)}{N}\right]\dots\left[a+\frac{(N-1)(b-a)}{N}\,,b\right]$$

에서 각각 0이라는 것을 보일 수가 있다. 즉, $g(x)$는 $[a,b]$에서 0이다.