POW 2011-17 Infinitely many solutions.

KAIST 11 김태호

(풀이) 모든 양의 정수 k에 대해서 무한한 해를 가짐을 보이자. 우선 다음 보조정리를 보이겠다.

[보조정리] 임의의 양의 정수 k에 대해서 $p+1, p+2, \cdots, p+k$이 모두 소수가 되지 않게 하는 소수 p는 무한하다.

[증명] 귀류법으로 적당히 큰 소수 P가 존재하여 임의의 소수 p가 $p \geq P$이면 $p+1, p+2, p+3, \cdots, p+k$ 중에서 소수가 적어도 하나 존재하는 양의 정수 k가 존재한다고 하자.

이제 P이상의 양의 정수 중 소수가 없는 연속된 k개가 존재한다하고 이를 $q_1+1, \cdots, q_1+k$라 하자. q_1보다 작은 최대의 소수를 q라 하자. 가정에 의해서 $q+1, q+2, \cdots, q+k$ 중에서는 소수가 존재하게 된다. 그 소수가 q_1보다 작으면 q가 q_1보다 작은 최대의 소수라는데 모순이고, q_1보다 크면 이 수는 q_1에서 q_1+k 사이에 있게 되는데 이 중에 소수가 없다고 했으므로 모순이다. 즉 P 이상의 임의의 연속한 k개의 양의 정수를 잡았을 때, 이 중에는 소수가 하나는 존재한다.

하지만 적당히 큰 N을 잡았을 때, $(k+1)!N+2, (k+1)!N+3, \cdots, (k+1)!N+(k+1)$ 은 연속한 k개의 양의 정수이고 $(k+1)!N+1 > P$인 N또한 잡을 수 있다. 그리고 각 항은 모두 합성수이므로 모순이다.

따라서 귀류법에 의해서, 보조정리가 참임을 알 수 있다.

[보조정리]에 의해서 임의의 양의 정수 k에 대해서 $p+1, p+2, \cdots, p+k$가 모두 소수가 아닌 소수 p는 무한하다. 따라서 양의 정수 k에 대해 $p > k^2$을 만족하고 $p+1, p+2, \cdots, p+k$가 모두 소수가 아닌 p 또한 무한하다. 이런 $p+j (j=1, 2, \cdots, k)$꼴의 수에 대해서 $f(p+j)$를 생각하자. 이 수들이 합성수이므로 1과 자기 자신이 아닌 약수 중 $\sqrt{p+j}$이상인 것이 존재한다. 그것을 d라 하면 $d \geq \sqrt{p+j} > \sqrt{p} > k$이므로 $f(p+j) \geq 1+p+j+d > p+k$가 된다. 즉 $f(p+k) = p$임을 알 수 있다. ($\because p$의 약수는 $1, p$로 더하면 $p+1 \leq p+k$) 따라서 $n - f(n) = k$의 해는 $n = p+k$로 p가 무한하므로 n 또한 무한하게 된다.

따라서 문제의 답은 모든 양의 정수이다.

답: k=모든 양의 정수