2011 장경석 POW 2011-14

M의 i번째 행의 대각선 위의 성분을 a_i라 하자. 그러면

$$\det(M-J) = \det\begin{pmatrix} a_1-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a_2-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & a_3-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & a_4-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & a_n-1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

각 행에 첫번째 행을 빼는 row operation

$$= \det\begin{pmatrix} a_1 - a_1\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \left(a_1 - a_1\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=2}^{n} a_i$$

i번째 행에 $\frac{1}{a_i}$을 곱한 후 1행에 빼는 row operation

a_i는 모두 양수이므로 $\det(M-J) \neq 0 \iff a_1 - a_1\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \neq 0 \iff 1 \neq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$

claim ① $tr(M) < n^2$이면 $1 \neq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$

pf) 만약 이를 만족하는 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$가 있다고 하면

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} = 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = tr(M)$ ⇒ 산술기하 평균에서 $1 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i}}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i}}$, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{tr(M)}{n} < \frac{n^2}{n} = n$ $\quad n^2 > tr(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq n$, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} < n$?! 모순!

∴ claim 성립.

∴ $f(n) \geq n^2$

② $tr(M) = n^2$이면 $a_i = n$ $\forall i$ 로 놓으면 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} = 1$으로 $M-J$의 역행렬이 없어짐.

∴ $f(n) \leq n^2$

∴ $f(n) = n^2$