< Problem of the week >

20080344 수리과학과
박 승 균

풀이)
좀 더 일반적인 명제로 다음의 Claim을 증명하자.

「 Claim:
n이 2 이상의 임의의 정수, p가 임의의 복소수이다. $M=(m_{ij})$ 는 $n\times n$ 행렬로
$j=1$ 일 때는 $m_{ij}=1$ 이고 $j\ge 2$ 일 때는
$m_{ij} = (p+i-1)(p+i)\dots(p+i+j-3)$ 이다. 이 때 $\det M = 1!2!\dots(n-1)!$ 이다. 」

위의 Claim에서 p=1인 경우가 바로 문제의 경우이다. n에 대한 Induction을 이용하여 위의 Claim을 증명하자.

ⅰ) n=2 일 때

$\begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = 1$ 이므로 성립한다.

ⅱ) n=k-1 일 때 성립하면, n=k 일 때 성립함을 보이자.
먼저 k × k 행렬 M의 성분을 다음과 같이 나타내어 보자.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & p & p(p+1) & \dots & p(p+1)\dots(p+k-2) \\ 1 & p+1 & (p+1)(p+2) & \dots & (p+1)(p+2)\dots(p+k-1) \\ & & \dots & \dots & \\ 1 & p+k-1 & (p+k-1)(p+k) & \dots & (p+k-1)\dots(p+2k-3) \end{pmatrix}$$

k번째 row에서 (k-1)번째 row를 빼고, (k-1)번째 row에서 (k-2)번째 row를 빼고 ... 이런식으로 2번째 row에서 1번째 row를 뺀다. 그러면 다음을 얻을 수 있다.

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & p & p(p+1) & p(p+1)(p+2) & \dots & p(p+1)\dots(p+k-2) \\ 0 & 1 & 2(p+1) & 3(p+1)(p+2) & \dots & (k-1)(p+1)\dots(p+k-2) \\ 0 & 1 & 2(p+2) & 3(p+2)(p+3) & \dots & (k-1)(p+2)\dots(p+k-1) \\ & & & \dots & & \\ 0 & 1 & 2(p+k-1) & 3(p+k-1)(p+k) & \dots & (k-1)(p+k-1)\dots(p+2k-4) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2(p+1) & 3(p+1)(p+2) & \ldots & (k-1)(p+1)\ldots(p+k-2) \\ 1 & 2(p+2) & 3(p+2)(p+3) & \ldots & (k-1)(p+2)\ldots(p+k-1) \\ & & \ldots & & \\ 1 & 2(p+k-1) & 3(p+k-1)(p+k) & \ldots & (k-1)(p+k-1)\ldots(p+2k-4) \end{vmatrix}$$

$$= (k-1)! \begin{vmatrix} 1 & p+1 & (p+1)(p+2) & \ldots & (p+1)\ldots(p+k-2) \\ 1 & p+2 & (p+2)(p+3) & \ldots & (p+2)\ldots(p+k-1) \\ & & \ldots & & \\ 1 & (p+k-1) & (p+k-1)(p+k) & \ldots & (p+k-1)\ldots(p+2k-4) \end{vmatrix}$$

(k-1)! 옆에 곱해진 행렬은 Claim의 조건을 만족하는 (k-1) × (k-1) 행렬이다(Claim의 조건에서 p대신 p+1, n대신 k-1이 들어갔다고 생각한다). 따라서 Induction hypothesis에 의해 오른쪽의 행렬식의 값은 1!2!...(k-2)! 이다.
따라서 $\det M = 1!2!\ldots(k-1)!$ 이 된다. Induction에 의해 증명 끝.

문제의 답은 1!2!3! ... (n-1)! 이다.