POW 2011-10 Multivariable Polynomial

전산학과 09학번 강동엽

Lemma 1.
$n \in Z$에 대해서, $[n] = \{1,2,...,n\}$이라 정의하자.
$m,n \in Z$, $n \geqq 0$, $m \geqq 0$이고
$N = \{f \mid f : [n] \to [m]\ ,\ f([n]) = [m]\}$라 할 때, $|N| = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m+i} \binom{m}{i} i^n$이다.
(polynomial에서는 편의상 $0^0 = 1$로 둔다. $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 x^0$에서 $x = 0$인 경우 $a_0 x^0 = a_0$이 되게 하기 위함)

(증명)
$m = n = 0$이면 주어진 식은 $|N| = 1$을 만족한다.
$m > 0$, $n = 0$이면 주어진 식은 $\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m+i} \binom{m}{i} i^n = (-1)^m (1-1)^m = 0$을 만족하므로 성립.
(실제로 $|N| = 0$)
이제 $m,n \geqq 1$인 경우에서 Lemma 1의 식이 맞는지 확인하자.
$I_j : \{f \mid f : [n] \to [m]\ ,\ j \not\in f([n])\}$로 두자. $(1 \leqq j \leqq m)$
그렇다면, $|N| = |\{f \mid f : [n] \to [m]\}| - \left| \bigcup_{i=1}^{m} I_i \right|$임을 안다. 따라서 $\left| \bigcup_{i=1}^{m} I_i \right|$를 구하기 위해서 포함배제 원리를 이용한다.

$$\left| \bigcup_{i=1}^{m} I_i \right|$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (m-1)^n + (-1) \sum_{1 \leqq i < j \leqq m} (m-2)^n + ...$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \binom{m}{i} (m-i)^n$$
$$= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i+1} \binom{m}{i} i^n$$

$$\therefore |N| = m^n - \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i+1} \binom{m}{i} i^n$$
$$= (-1)^m \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} i^n$$

실제로, $p(x) = ax^n$에 대해서 p를 x에 대해서 m번 미분한다 하자. $(m \geqq n)$
$m = n$이면 $\frac{d^m}{dx^m} p = an!$, $m > n$이면 $\frac{d^m}{dx^m} p = 0$임을 알 수 있다. 한편 $m = n$이면 $|N| = n!$, $m > n$이면 $|N| = 0$이므로 $\frac{d^m}{dx^m} p = a|N| = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m+i} \binom{m}{i} p(i)$임을 알 수 있다.

Lemma 2.
n개의 변수로 이루어진 다항식 $p(x_1,x_2,...,x_n)=(a_1x_1^{m_1})(a_2x_2^{m_2})...(a_nx_n^{m_n})$을 고려하자.
그리고 $p_i(x_i)=(a_ix_i^{m_i})$라 하자. $(1 \leqq i \leqq n)$
이 때, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{t_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{t_n}p$
$= \sum_{a_1=0}^{t_1}\sum_{a_2=0}^{t_2}\cdots\sum_{a_n=0}^{t_n}(-1)^{t_1+t_2+...+t_n+a_1+a_2+...+a_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\binom{t_i}{a_i}\right)p(a_1,a_2,...,a_n)$
를 만족한다. $(\deg(p) \leqq t_1+t_2+...+t_n\ ,\ t_i>0 \text{ for all } 1 \leqq i \leqq n)$

이제 $p(x_1,x_2,...,x_n)=(a_1x_1^{m_1})(a_2x_2^{m_2})...(a_nx_n^{m_n})$을 고려하자. 그리고 $p_i(x_i)=(a_ix_i^{m_i})$라 하자.
$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{t_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{t_n}p$를 고려하자. $(\deg(p) \leqq t_1+t_2+...+t_n)$
만약 적어도 하나의 t_i가 존재하여, $t_i>m_i$라면 결국 상수항을 미분하게 되므로 결과는 0이 된다. $(1 \leqq i \leqq n)$
남은 경우는 임의의 $1 \leqq i \leqq n$에 대해서 $m_i=t_i$인 경우이다. 이 경우 각 변수에 대해서 독립적으로 미분하는 경우와 결과가 같게 되므로,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{t_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{t_n}p$$
$$=\sum_{a_1=0}^{t_1}(-1)^{t_1+a_1}\binom{t_1}{a_1}p_1(a_1)\sum_{a_2=0}^{t_2}(-1)^{t_2+a_2}\binom{t_2}{a_2}p_2(a_2)\cdots\sum_{a_n=0}^{t_n}(-1)^{t_n+a_n}\binom{t_n}{a_n}p_n(a_n)$$
$$=\sum_{a_1=0}^{t_1}\sum_{a_2=0}^{t_2}\cdots\sum_{a_n=0}^{t_n}(-1)^{t_1+t_2+...+t_n+a_1+a_2+...+a_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\binom{t_i}{a_i}\right)p(a_1,a_2,...,a_n)$$

가 된다.
위 식은 $t_i>m_i$인 t_i가 존재하는 경우도 성립한다. 왜냐하면 위 식의 2번째 줄의 n개의 sigma 중 i번째 sigma (a_i를 변수로 하는)가 0이 되기 때문에, 결국 0을 식에 곱하게 되어 0이라는 결과가 나오기 때문이다.
따라서 위 식은 $\deg(p) \leqq t_1+t_2+...+t_n$인 경우에 대해서 성립한다.

이제 결론을 내릴 수 있다. 어차피 임의의 변수가 n개인 다항식은 $p(x_1,x_2,...,x_n)=(a_1x_1^{m_1})(a_2x_2^{m_2})...(a_nx_n^{m_n})$ 꼴의 항들이 여러 개 합해진 form이므로, 위의 sigma로 이루어진 식에서 sigma를 merge하게 되면 Lemma 2의 식과 같은 식이 된다.

결론
n개의 변수로 이루어진 다항식 $p(x_1,...,x_n)$에 대해서, $\deg(p) \leqq t_1+t_2+...+t_n$이라 하자. $(t_i>0 \text{ for all } 1 \leqq i \leqq n)$
$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{t_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{t_n}p$
$= \sum_{a_1=0}^{t_1}\sum_{a_2=0}^{t_2}\cdots\sum_{a_n=0}^{t_n}(-1)^{t_1+t_2+...+t_n+a_1+a_2+...+a_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\binom{t_i}{a_i}\right)p(a_1,a_2,...,a_n)$를 만족한다.