POW 2011-8 Geometric Mean

전산학과 09학번 강동엽

Lemma 1.
$f(x)=ax^m$에 대해서 $(m \geq 0)$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cdots \int_0^1 f((x_1x_2\cdots x_n)^{1/n})dx_1dx_2\cdots dx_n = f(1/e)$를 만족한다.

(pf)

먼저 $m=0$인 경우는 limit 안의 적분값이 a이므로 $f(1/e)=a(1/e)^0=a$의 값이 나온다.
$m>0$인 경우를 고려하자.
$f((x_1x_2\cdots x_n)^{1/n})=a(x_1x_2\cdots x_n)^{m/n}$이다. 따라서 limit 내에 있는 적분은 $a\left(\int_0^1 x^{m/n}dx\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{m}{n}}\right)^n$이 된다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+m/n)^n} = \lim_{n\to\infty}a\left(\frac{1}{(1+m/n)^{n/m}}\right)^m = a(1/e)^m = f(1/e)$이다.

Lemma 1은 f가 임의의 다항함수이면 성립함을 알 수 있다. 이제 Stone-Weierstrass Theorem을 이용하자.

Lemma 2 (Stone-Weierstrass Theorem).
f가 [a,b]위에서 정의된 연속함수라면, 다항함수열 $\{P_n\}$이 존재하여 P_n은 f로 [a,b]위에서 uniformly converge한다.

증명은 해석학에서 다루므로 생략한다. 풀이의 마지막에 적힌 References에 이에 대한 증명이 실려 있다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cdots \int_0^1 P_k((x_1x_2\cdots x_n)^{1/n})dx_1dx_2\cdots dx_n = P_k(1/e)$를 만족한다.
한편 P_n은 f로 uniformly converge하므로, 임의의 $\varepsilon>0$에 대해서, M이 존재하여 $\forall k \geq M$에 대해서 $|P_k(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$ 를 만족한다.

따라서,

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cdots \int_0^1 f((x_1x_2\cdots x_n)^{1/n})dx_1dx_2\cdots dx_n - P_k(1/e)\right|$$
$$=\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cdots \int_0^1 f((x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}) - P_k((x_1x_2\cdots x_n)^{1/n})dx_1dx_2\cdots dx_n\right|$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left|f((x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}) - P_k((x_1x_2\cdots x_n)^{1/n})\right| \ dx_1dx_2\cdots dx_n < \varepsilon$$

을 $\forall k \geq M$에 대해서 만족한다. ε은 임의의 양수이므로,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cdots \int_0^1 f((x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n})dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \lim_{k\to\infty} P_k(1/e) = f(1/e)$$ 이다.

References

Principles of Mathematical Analysis, Walter Rudin (Third Edition)

Stone-Weierstrass Theorem의 증명은 159쪽 참고.