POW 2011-3 Counting functions

20090009 강동엽

먼저 아래의 3개의 정리들은 해석학에서 다루는 내용들이다.

Theorem 1.
급수 $A=\sum_{n\geq 0} a_n$이 절대수렴하고 $B=\sum_{n\geq 0} b_n$이면 $c_n=\sum_{r\geq 0} a_r b_{n-r}$이라 할 때 $\sum_{n\geq 0} c_n = AB$를 만족한다.

Theorem 2.
이중수열 a_{mn} $(m,n\geq 0,\ m,n\in Z)$에 대해서, $a_{mn}\geq 0$이면 $\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} a_{mn}=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} a_{mn}$이 성립한다.

Theorem 3.
수열 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$이 $(-R,R)$에서 수렴한다 하자. 그리고 T를 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n=\sum_{n\geq 0} b_n x^n$을 만족하는 $x\in(-R,R)$의 집합이라 하자. 만약 T가 limit point $x_0\in S$를 갖는다면, 임의의 $n\geq 0$에 대해서 $a_n=b_n$를 만족한다.

Theorem 4.
$f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$, $g(x)=\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$라 하자. 여기서 $f(x)$와 $g(x)$는 exponential generating function이다.
이 때 $h(x)=f(x)g(x)$라 할 때, $h(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$를 만족한다. 다시 말하면, $\left[\frac{x^n}{n!}\right](fg)=\sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r}$를 만족한다.

증명
생성함수에서 곱은 Cauchy product의 꼴로 정의되어 있으므로 다음과 같다.

$h(x)=f(x)g(x)$

$$=\sum_{r\geq 0}\frac{a_r x^r}{r!}\sum_{s\geq 0}\frac{b_s x^s}{s!}$$

$$=\sum_{r,s\geq 0}\frac{a_r b_s x^{r+s}}{r!s!}$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\sum_{r+s=n}\frac{n!a_r b_s}{r!s!}=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\sum_r a_r b_{n-r}\binom{n}{r}$$

Theorem 5.

$[n] \to [k]$의 전사함수의 개수는 생성함수 $h_k(x) = (e^x - 1)^k = \left(\sum_{r \geq 1} \frac{x^r}{r!} \right)^k$의 $\frac{x^n}{n!}$의 계수이다.

k에 대한 수학적 귀납법을 이용하여 증명한다.

(1) Basis Step ($k = 0,1$) : $n = k = 0$일 때 $[n] \to [k]$의 전사함수의 개수는 1개이다. (공집합에서 공집합으로의 전사함수의 개수) 마찬가지로 $(e^x - 1)^0 = 1$의 상수항의 계수는 1이다.

$n > 0$, $k = 0$일 때 $[n] \to [k]$의 전사함수의 개수는 0개이다. 마찬가지로 $(e^x - 1)^0 = 1$의 $x^n/n!$의 계수는 0이다.

$n = 0$, $k = 1$일 때 $[n] \to [k]$의 전사함수의 개수는 0개이고, $(e^x - 1) = \sum_{r \geq 1} x^r/r!$의 상수항의 계수는 0이다. 마찬가지로, $n > 0$, $k = 1$일 때 $[n] \to [k]$의 전사함수의 개수는 1개이고 $e^x - 1$의 $x^n/n!$의 계수는 1이다.

(2) Inductive Step : $n = k$일 때 성립하면 $n = k + 1$일 때 성립하는가?

$g(x) = e^x - 1 = \sum_{r \geq 1} \frac{x^r}{r!}$이라 하자. $h_{k+1}(x) = h_k(x)(e^x - 1) = h_k(x)g(x)$이다. Theorem 4에 의해서, $h_{k+1}(x)$의 $x^n/n!$의 차수는 $\sum_r \binom{n}{r} a_{n-r} b_r$임을 알 수 있다. 귀납가정에 의해서 a_{n-r}은 $[n-r] \to [k]$의 전사함수의 개수이다. 그리고 b_r은 $r > 0$이면 1, $r = 0$이면 0이다.

전사함수 $[n] \to [k+1]$을 고려하자. $[n]$에서 적당히 r개의 원소를 뽑아 $k+1$에 대응하고, 나머지 $n-r$개의 원소는 $[k]$에 대응한다. 이 때 $n-r$개의 원소가 $[k]$에 전사함수의 꼴로 대응하는 개수는 a_{n-r}이고, r개의 원소가 $k+1$에 대응하는 경우는 1가지이다. 단 $r = 0$인 경우는 $[n] \to [k+1]$이 전사함수가 될 수 없다. ($k+1$에 대응하는 원소가 없으므로) 따라서, r개를 뽑는 과정을 $\binom{n}{r}$, 그리고 $[n-r] \to [k]$의 대응을 a_{n-r}, r개의 원소들이 $k+1$에 대응하는 것을 b_r로 두면 $[n] \to [k+1]$의 전사함수의 개수와 대응이 됨을 알 수 있다. 즉 $\sum_r \binom{n}{r} a_{n-r} b_r$이 $[n] \to [k+1]$의 전사함수의 개수에 해당되고, 증명이 완료되었다.

Theorem 6.

$F(x) = \sum_{k \geq 0} (e^x - 1)^k = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{t \geq 1} \frac{x^t}{t!} \right)^k$이라 하자. 그렇다면 $F(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{2^{k+1}} \frac{x^n}{n!}$를 만족한다.

단 x의 범위를 $1 < e^x < 2 \leftrightarrow 0 < x < \ln 2$ 로 한정짓는다.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k \geqq 0} (e^x - 1)^k \\
&= \frac{1}{2 - e^x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{e^x}{2}} \\
&= \sum_{k \geqq 0} \frac{e^{xk}}{2^{k+1}} \\
&= \sum_{k \geqq 0} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n \geqq 0} \frac{(xk)^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geqq 0} \left(\sum_{k \geqq 0} \frac{k^n}{2^{k+1}} \right) \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

(맨 아래의 등식에서 n과 k가 바뀔 수 있는 것은 Theorem 2에 의해서)

위의 등식은 $0 < x < \ln 2$에서 모두 만족하고 $\sum_{k \geqq 0} (e^x - 1)^k$의 수렴범위는 $-\infty < x < \ln 2$이므로, $T = \{x \mid 0 < x < \ln 2\}$는 $S = \{x \mid -\infty < x < \ln 2\}$안의 limit point를 가진다. (그냥 $0 < x < \ln 2$의 아무 원소를 택하면 그것이 S 내의 limit point가 된다.) 따라서, Theorem 3에 의해서 $[x^n/n!] \sum_{k \geqq 0} (e^x - 1)^k$과 $[x^n/n!] \sum_{n \geqq 0} \sum_{k \geqq 0} \frac{k^n}{2^{k+1}} \frac{x^n}{n!}$이 같음을 알 수 있다. 전자는 임의의 $k \geqq 0$에 대한 $[n] \rightarrow [k]$의 전사함수의 개수이므로, 결국 원하는 것을 증명했음을 알 수 있다.