# POW 2010-19 풀이

수리과학과 06 김치헌

$Ax = Tx + b$라 하자. 그러면,

$$A^k x = T^k x + (I + T + \cdots + T^{k-1})b$$

가 된다. 따라서, $A^k u = u$와 $(I - T^k)u = (I + T + \ldots + T^{k-1})b$는 동치다. $T_k = I + T + \ldots + T^{k-1}$이라 하자. 그러면, $I - T^k = T_k(I - T)$이므로,

$$T_k((I - T)u - b) = 0$$

이다. 즉, $A^k u = u$인 $u$가 존재하는 것과 $b \in Im(T - I) + ker(T_k)$인 것이 동치다. $A$가 임의의 아핀변환이므로 $b$는 $V$의 임의의 벡터고, 따라서 $Im(T - I) + ker(T_k) = V$임을 보이면 충분하다.

만일 $T - I$의 역행렬이 존재한다면 $Im(T - I) = V$이므로 $\det(T - I) = 0$이라 가정해도 무방하다. 이 경우, $T$는 1을 eigenvalue로 가진다. 1의 generalized eigenspace를 $V_1 \subset V$라 하자. 그러면, $T - I$는 $V_1$에서 nilpotent이다 (T의 Jordan decomposition을 생각해보면 쉽게 알 수 있다). 즉, $N = (T - I)|_{V_1}$이라 할 때, $N^{\dim V_1} = 0$이다.

한편, $V_1$에서,

$$\begin{aligned} T_k &= \sum_{i=0}^{k-1} (I + N)^i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} N^j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \sum_{i=j}^{k-1} \binom{i}{j} \right] N^j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j+1} N^j \end{aligned}$$

이다. 만일 $k$가 $p$의 배수이면, $\binom{k}{j}$도 $1 \le j \le k - 1$에 대해 $p$의 배수이므로 ($V_1$에서) $T_k = N^{k-1}$이 된다.

이제 $k = np$라 해보자. 그러면 $np - 1 \ge n \ge \dim V_1$이고, 따라서 $N^{np-1} = 0$이다. 즉, ($V_1$에서) $T_{np} = 0$이고 $V_1 \subset ker(T_{np})$인데, $ker(T - I)$는 $V_1$의 subspace이다. $ker(T - I) \oplus Im(T - I) = V$이므로, $ker(T_{np}) + Im(T - I)$또한 $V$가 된다.