<POW-2010-15> 수리과학과 06 김휘헌

<u>보조 정리</u> A가 skew-symmetric matrix면, A의 rank는 짝수이다.

<u>pf)</u> A의 크기 n에 대한 귀납법을 사용하자.

$n=1$일 때는 $A=[0]$이므로 $\text{rank}(A)=0$으로 짝수다.

$n=k$일 때 성립한다고 가정하자.

$(k+1)\times(k+1)$ 크기의 skew-symmetric matrix A는 $\left[\begin{array}{c|c} B & x \\ \hline -x^T & 0 \end{array}\right]$

의 형태로 항상 쓸 수 있다. 여기서, 만일 x가 B의 column과 독립이 아니라면, $\text{rank}(A)=\text{rank}(B)$이고 B도 skew-symm. 이므로 짝수다.

만일 x가 B의 column과 독립이라면, $-x^T$는 B의 row들과 독립이고,

따라서 $\text{rank}(A)=\text{rank}\left(\left[B \mid x\right]\right)+1=\text{rank}(B)+2$로 짝수다. ///

A, B는 $2n\times 2n$ skew-symmetric matrix다. $U=\ker(B)$, $\text{rank}(B)=2m$이라 하자.

U에서 한 orthonormal basis $\{e_{2m+1}, e_{2m+2}, \cdots, e_{2n}\}$을 택하자.

그러면, F^{2n}의 orthonormal basis $\mathcal{B}=\{e_1, e_2, \cdots, e_{2m}, e_{2m+1}, \cdots, e_{2n}\}$을 잡을 수 있다.

여기서, $A_1=A|_{\mathcal{B}}$, $B_1=B|_{\mathcal{B}}$라 하면, $\mathcal{B}$가 orthonormal 이므로

A_1과 B_1 또한 skew-symmetric이고, $A_1=\left[\begin{array}{c|c} A_2 & 0 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right]$, $B_1=\left[\begin{array}{c|c} B_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$,

이 형태가 된다. 여기서 $\det(\lambda I_{2n}-AB)=\det(\lambda I_{2n}-A_1B_1)=\lambda^{2n-2m}\det(\lambda I_{2m}-A_2B_2)$,

즉 $f(\lambda)=\lambda^{2n-2m}\det(\lambda I-A_2B_2)$가 된다.

2n−2m이 짝수이므로, A_2, B_2에 관해서만 생각해도 된다.

B_2가 nonsingular 이므로, $\lambda I - A_2 B_2 = (\lambda B_2^{-1} - A_2) B_2$ 이다.

여기서, $\det(\lambda I - A_2 B_2) = \det(\lambda B_2^{-1} - A_2)\det(B_2)$이다.

그런데, $\lambda B_2^{-1} - A_2$는 $2m \times 2m$ skew-symmetrix matrix이므로,

$\det(\lambda B_2^{-1} - A_2) = [Pf(\lambda B_2^{-1} - A_2)]^2$ (Pf : Pfaffian) 이다.

$Pf(\lambda B_2^{-1} - A_2)$는 λ에 관한 다항식이므로, $g(\lambda) = Pf(\lambda B_2^{-1} - A_2)$라 하면,

$\det(\lambda I - A_2 B_2) = \det(B) \cdot [f(\lambda)]^2$ 이다.

따라서, $\det(\lambda I - A_2 B_2)$에서 모든 근은 짝수 multiplicity를 갖는다.

$\Rightarrow$ $f(\lambda)$의 모든 근은 짝수 multiplicity를 갖고, 따라서 2 이상이다.