서기원 (09학번)

POW 2010-14

문제: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+2k}{n+k}\binom{n+k}{2k}=(-4)^n$

(i는 허수를 말함)

pf) $(1+(i+x)^2)^{2n}$ 을 전개하였을 때, x^{2n}의 계수를 보면,

$$(1+(i+x)^2)^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}(i+x)^{2j}=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}\sum_{l=0}^{2j}\binom{2j}{l}i^{2j-l}x^{l}$$ 이므로,

$j<n$ 일때는 x^{2n} 항이 나올수 없으므로 ($\because l\le 2j<2n$)

x^{2n} 의 계수는 $\displaystyle\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n}{j}\binom{2j}{2n}i^{2j-2n}$ 이 된다.

$j=n+k$로 치환하면, x^{2n}의 계수는 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{n+k}\binom{2n+2k}{2n}i^{2k}$

그런데 $$\binom{2n}{n+k}\binom{2n+2k}{2n}=\frac{\cancel{(2n)!}}{(n+k)!(n-k)!}\frac{(2n+2k)!}{\cancel{(2n)!}(2k)!}=\frac{(2n+2k)!}{(n+k)!(n+k)!}\frac{(n+k)!}{(n-k)!(2k)!}=\binom{2n+2k}{n+k}\binom{n+k}{2k}$$

이므로, x^{2n}의 계수는 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+2k}{n+k}\binom{n+k}{2k}(-1)^k$ 가 된다. — ①

또한, $(1+(i+x)^2)^{2n}=(1+i^2+2ix+x^2)^{2n}=(x(2i+x))^{2n}$

$=x^{2n}(2i+x)^{2n}$ 이므로,

x^{2n}의 계수는 $(2i)^{2n}=(-4)^n$ — ②

①, ② 에서, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+2k}{n+k}\binom{n+k}{2k}=(-4)^n$ 을 얻는다.