POW 2010-12 풀이

수리과학과 06 김치헌

먼저, Combinatorial Nullstellensatz를 소개하겠다.

정리 1 (Combinatorial Nullstellensatz) *다변수 다항식 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$이 필드 F위에서 정의되어 있다. f에서 $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$의 계수가 0이 아니고 $k_1 + \ldots + k_n$이 f의 차수라고 하자. 이 때, F의 부분집합 $A_1, \ldots, A_n$이 각각 $|A_i| > k_i$를 만족하면, 각 A_i에서 a_i를 뽑아 $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$이도록 할 수 있다.*

원래의 문제로 돌아가, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det(A + \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n))$이라 정의하자 ($\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$은 $x_1, \ldots, x_n$을 대각항으로 갖는 대각행렬이다). 그러면 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$은 n차 다변수 다항식이고, $x_1 x_2 \ldots x_n$의 계수는 1이다. $|\{-1, 1\}| > 1$이므로 위의 정리에 의해 $f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$인 $y_i \in \{-1, 1\}$을 각각 찾을 수 있고, 따라서 $D = diag(y_1, y_2, \ldots, y_n)$이라 하면 $\det(A + D) \neq 0$, 즉 $A + D$의 역행렬이 존재한다.