POW 2010-11

f가 주어진 조건을 만족하는 함수라고 가정하자. 양변을 e^x로 나누면

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{e^x} &= 1 + z\int_0^1 \frac{e^{x-y}f(y)}{e^x}dy \\ &= 1 + z\int_0^1 \frac{f(y)}{e^y}dy\end{aligned}$$

g(x)=$\frac{f(x)}{e^x}$라고 하면,

$$g(x) = 1 + z\int_0^1 g(y)dy \tag{1}$$

우변의 함수는 x의 값과 무관한 값을 가지므로 g는 상수함수
g(x)=c라고 하고, 이를 (1)에 대입하면 $c = 1 + z\int_0^1 cdy = 1 + zc \quad (1-z)c = 1$
따라서, z=1일 때는 c가 존재하지 않고, z≠1일때 $c = \frac{1}{1-z}$ 그러므로, z≠1일때 g(x)= $\frac{1}{1-z}$ 이므로 f(x) = $\frac{1}{1-z}e^x$을 얻는다. 이를 원식에 대입하면 항등식이 되므로, 위 함수가 z≠1일 때 유일한 해가 됨을 알 수 있다. 또한 z=1일 경우에는, c=1+c에서 c를 만족하는 해가 없음을 확인할 수 있다.

Answer:

$$f(x) = \frac{1}{1-z}e^x \quad when\ z \neq 1$$

And no solution when z=1