POW 2010-3

2009학번 무학과 김호진

Evaluate the following sum

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (m,n)=1}} \frac{x^{m-1}y^{n-1}}{1-x^m y^n}$$

when $|x|, |y| < 1$.
(We write (m, n) to denote the g.c.d. of m and n.)

Sol.

우리가 구하는 합을 $S(x, y)$ 라 하자. 우선 $xy \neq 0$ 인 경우에,

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (m,n)=1}} \frac{x^{m-1}y^{n-1}}{1-x^m y^n} \\ &= \frac{1}{xy} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (m,n)=1}} x^m y^n (1 + x^m y^n + (x^m y^n)^2 + \cdots) \\ &= \frac{1}{xy} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (m,n)=1}} \big(\sum_{k=1}^{\infty} (x^m y^n)^k \big) \end{aligned}$$

이 급수는 절대수렴(converges absolutely)하므로, 더하는 순서를 재배열해도 그 수렴 여부나 수렴값이 바뀌지 않는다. 시그마의 순서를 바꾸어

$$S(x,y) = \frac{1}{xy} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (m,n)=1}} (x^m y^n)^k$$

를 얻는다.
한편, 절대수렴하는 급수 $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{p,q}$ 는, (p, q)의 값에 따라 이들을 재배열

하면 $\sum_{d=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (m,n)=d}}^{\infty} a_{m,n}$ 임을 알 수 있다. 이것을 생각하면,

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \frac{1}{xy} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (m,n)=1}} (x^m y^n)^k \\ &= \frac{1}{xy} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (m,n)=k}} x^m y^n \\ &= \frac{1}{xy} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (x^p y^q) \\ &= \frac{1}{xy} \sum_{p=1}^{\infty} x^p \sum_{q=1}^{\infty} y^q \\ &= \frac{1}{xy} \frac{x}{1-x} \frac{y}{1-y} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-y)} \end{aligned}$$

한편, $xy = 0$이면 문제가 생기는데, 일반성을 잃지 않고 $x = 0$이라 하면, 우리의 합은 $\frac{0^{1-1} y^0}{1-0\cdot} = 0^0$을 포함하고 있기 때문이다. 0^0 은 정의되지 않는다. 다만, 0^0 를 정의해야 한다면 1이라고 정의하는 것이 합당하다는 여러 예를 살펴볼 수 있는데, 이렇게 정의하기로 하고 간단한 계산을 거치면 역시 $S(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$를 얻는다. ■