$Let, \pi(n) = n$보다 작은 소수의 개수.
$claim]\ \max(k) = \pi(n)+1$

먼저 $\max(k) \leqq \pi(n)+1$을 보이자.
n이하의 모든 자연수는 다음과 같은 방법을 이용하여 분류 할 수 있다.
$A_1 = \{1\}$
$A_p = \{x|x$의 가장 작은 소인수가 $p\}$ $(p = 2, 3, \cdots, \pi(n))$
각 집합 A_p의 임의의 원소 $\gcd(a_i, a_j) = p$가 성립한다. 그러므로 모든 $\gcd(a_i, a_j) = 1$을 만족하기 위해서는 각 집합에서 최대 1개의 원소만을 선택해야 한다.
$\therefore \max(k) \leqq \pi(n)+1$

이제 $\max(k) \geqq \pi(n)+1$을 보이자.
$a_1 = 1,\ a_{i+1} = i$번째 소수라고 하자. $(1 \leqq i \leqq \pi(n))$
이들은 모두 1과 소수이므로 임의의 두 수 a_i, a_j에 대해 $\gcd(a_i, a_j) = 1$을 항상 만족한다.
$\therefore \max(k) \geqq \pi(n)+1$

$\therefore \max(k) = \pi(n)+1$
이로써 $claim$이 증명되었다. 또, $claim$에 따라 k의 최대값은 $\pi(n)+1$이다.