

# POW 2009-15

2009학번 무학과 김호진

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{mn}$$

의 값을 구하여라.

SOL.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{mn} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{mn} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{m(m+n)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m (-1)^n \frac{1}{n} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m (-1)^n \frac{1}{mn} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{n(m+n)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{mn} \\ &= (\ln 2)^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{mn} \end{aligned}$$

그러므로, 구하고자 하는 값은  $\frac{(\ln 2)^2}{2}$  이다. ■