POW Problem 13: Solution

Kim, Chiheon(Department of Mathematical Sciences)

2009년 5월 14일

n에 관한 (강한) 귀납법을 사용하자. 먼저 $n = 2$일 때를 살펴보자. 두 점 사이의 거리는 최대 $\sqrt{2}$이므로 $r_1^2 + r_2^2 \le 2(\sqrt{2})^2 = 4$이다. 따라서 본래 식이 성립한다.

$n > 3$이라 하자. 정사각형을 4개의 합동인 작은 정사각형으로 분할해보자. 즉, $[0,1]^2$을 $A_1 = [0, \frac{1}{2})^2$, $A_2 = [0, \frac{1}{2}) \times [\frac{1}{2}, 1]$, $A_3 = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2})$, $A_4 = [\frac{1}{2}, 1]^2$으로 분할한다. 먼저, 모든 점이 넷 중 한 영역에 다 들어있다면, 원래 문제에서 정사각형을 반으로 줄인 것이 된다. 따라서,

$$\sum_i r_i^2 \le 1 < 4$$

이다.

모든 점이 넷 중 두 영역 A_j, A_k에 모두 들어있다고 하자. 그러면, 만일 $|A_j| \ge 2$이면, 귀납가설에 의해

$$\sum_{P_i \in A_j} r_i^2 \le \sum_{P_i \in A_j} \min_{P_r \in A_j - P_i} d(P_r, P_i)^2 \le 1$$

이 된다. 한 편, 모든 i에 대해 $r_i^2 \le 2$이다. 따라서, 항상

$$\sum_{P_i \in A_j} r_i^2 \le 2$$

이 된다. A_k에 대해서도 같은 식이 성립하므로,

$$\sum_i r_i^2 \le 2 + 2 = 4$$

이다.

모든 점이 넷 중 세 영역에 모두 들어있는 경우를 생각하자. 이 경우, 일반성을 잃지 않고 A_1, A_2, A_3에 들어있다고 할 수 있다. 만일 $|A_k| \ge 2(k =1, 2, 3)$이

면 위와 같은 방법으로 A_k에 포함된 점에 대해 $\sum r_i^2 \le 1$임을 알 수 있다. 한 편, A_1과 A_2에 있는 점 사이의 거리는 최대 $\sqrt{5}/2$이고, A_1과 A_3에 있는 점 사이의 거리도 마찬가지로 최대 $\sqrt{5}/2$이다. 따라서 모든 점에 대해 거리가 $\sqrt{5}/2$이하인 점이 항상 존재한다. 즉, $r_i^2 \le 5/4$이다. 결국,

$$\sum_i r_i^2 \le \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{15}{4} < 4.$$

이제 각 영역에 포함된 점이 적어도 하나씩은 있는 경우를 생각하자. 만일 모든 영역이 점을 2개 이상 포함하면 각 영역에서 r_i^2의 합이 1 이하이기 때문에 모두 합하면 4 이하가 된다. 이제 점을 단 하나 포함하는 영역이 존재한다고 가정하자.

먼저, 그런 영역이 단 하나 존재한다고 가정하자. 그 영역이 A_1이라고 해도 무방하다. 이 때, A_2와 A_3를 다시 더 작은 사각형 네 개로 분할해 보면, $[0, \frac{3}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$에서 가장 거리가 먼 두 점의 거리는 $sqrt15/4 < 1$이기 때문에, A_2의 아래 사각형 2개와 A_3의 왼쪽 사각형 2개에는 점이 들어있을 수 없다는 것을 알 수 있다. 따라서, A_2에 속한 모든 점은 위 사각형 2개에 들어가고, A_3에 속한 모든 점은 오른쪽 사각형 2개에 들어간다. 따라서, 사각형 3개에 모든 점이 들어있는 경우와 비슷한 논의를 통해

$$\sum_{P_i \in A_2} r_i^2 \le \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$$

임을 알 수 있다. A_3에 대해서도 같은 식이 성립하고, 따라서

$$\sum_i r_i^2 \le \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + 1 = \frac{7}{2} < 4.$$

점을 단 하나 포함하는 영역이 정확히 2개라고 가정하자. 그러면, 그 영역이 A_1, A_2거나 A_1, A_4이다(다른 경우에도 대칭적으로 이런 형태로 바꿀 수 있다). A_1, A_2인 경우는 위와 같은 방법으로, A_3와 A_4에서 r_i^2의 합이 $\frac{5}{8}$임을 알 수 있다. 따라서

$$\sum_i r_i^2 \le \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{15}{4} < 4$$

이다. A_1, A_4인 경우는 A_2과 A_3를 네 개로 쪼갰을 때, 꼭지점을 포함하는 영역에만 점이 있어야 한단 것을 알 수 있다. 귀납 가설에 의해, 이 영역에서 r_i^2의 합은 $\frac{1}{4}$이하이므로,

$$\sum_i r_i^2 \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{21}{10} < 4$$

이다. 점을 하나만 포함하는 영역이 3개인 경우도 마찬가지로, 나머지 한 영역을 1/4로 쪼갠 영역 중 꼭지점을 포함하는 영역에만 점이 있어야 한다. 따라서,

$$\sum_i r_i^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = 4.$$

마지막으로, 모든 영역에 점이 단 하나씩만 있는 경우를 생각하자. 네 점이 볼록다각형을 이룬다고 해도 무방하다(삼각형 내부에 있는 점을 외부로 대칭시키면 모든 길이가 증가한다). 따라서, 네 점이 사각형의 모서리에 있다고 해도 무방하다(각 점을 그 점에서 나머지 점까지의 거리가 늘어나는 방향으로 모서리에 닿을 때까지 이동시킬 수 있다). 그런데, 네 점이 모서리 위에 있는 경우 네 점이 이루는 사각형의 변 길이의 제곱의 합은 정사각형의 꼭지점 위에 있을 때 최대가 되고, 이 경우에 4가 된다. 따라서, $\sum_i r_i^2 \leq 4$이다.