POW Problem 12: Solution

Kim, Chiheon(Department of Mathematical Sciences)

2009년 5월 6일

결론을 부정하여 잘 칠하는 방법이 존재한다고 가정해보자. 이 때, 각 색깔(빨강-초록-파랑)이 칠해진 수의 집합을 각각 R, G, B로 정의하자. 일반성을 잃지 않고, $1 = \min R < \min G < \min B$라 가정할 수 있다. 편의상 $g = \min G$, $b = \min B$라 정의하자.그러면 $1, 2, \ldots, g-1$은 모두 빨강색이고, $g \geq 2$라는 것을 쉽게 알 수 있다.

보조정리 1 *만일 z와 $z+k$가 모두 파랑색이면 $k \geq g$이다.*

(증명) $k < g$이고 z, $z+k$가 모두 파랑색인 z가 존재한다고 가정하자. 그런 z 중 가장 작은 것을 z_0라 하면,

$$z_0 + k - g = z_0 - (g - k) = (z_0 + k) - g$$

이다. 그런데, z_0가 파랑색이고 $g - k < g$이므로 빨강색이다. 따라서 $z_0 + k - g$는 초록색일 수 없다. 마찬가지로, $z_0 + k$가 파랑색이고 g가 초록색이므로 $z_0 + k - g$는 빨강색일 수 없다. 즉, $z_0 + k - g$는 파랑색이다(앞으로는 비슷한 논의는 수식의 색깔로 생략하여 표현하겠다). 한편,

$$z_0 - g = (z_0 + k - g) - k = z - g$$

인데 같은 논의로($k < g$이므로 빨강색이다) $z_0 - g$도 파랑색이다. 즉, $z_0 - g$와 $(z_0 - g) + k$는 모두 파랑색이다. 이것은 z_0가 가장 작다는 가정에 모순된다. 즉, 그런 z는 존재하지 않는다. □

$2 \leq g$이므로, 만일 z와 $z + k$가 모두 파랑색이면 $2 \leq g \leq k$이다. 그런데, $n/4$개 보다 많은 수에 파랑색을 칠했으므로, 모두 파랑색이면서 차가 3 이하인($<$ 4) 두 수 z와 $z + k$가 존재한다. 즉, $2 \leq g \leq 3$이다.

만일 $g = 3$이면, 1, 2는 모두 빨강색이다. 만일 z가 파랑색이면, 보조정리에 의해 $z+1$과 $z+2$는 파랑색일 수 없고, 1과 2가 모두 빨강색이므로 초록색일 수도 없다. 즉, $z+1$과 $z+2$는 모두 빨강색이다. 마찬가지로, $z-1$과 $z-2$도 모두 빨강색이어야 한다. 따라서,

$$|R| \geq 2|B| > \frac{n}{2}$$

인데, 이것은 $|B| + |G| > n/2$인데 모순된다. 따라서, $g = 2$이다.

이제 B의 원소 중에서 차가 가장 작은 두 원소를 고르자. 만일 두 원소가 z, $z+3$이라면, $z + 1 = (z+3) - 2$이므로 $z+1$은 빨강색일 수도 없고, 초록색일 수도 없다. 하지만 파랑색도 될 수 없으므로 모순이다. 즉, 차가 가장 작은 두 원소는 그 차가 2이다. 그런 원소 중 가장 작은 원소를 z와 $z+2$라고 두자.

이제부터 모든 홀수가 빨강색임을 귀납적으로 보일 것이다. 1과 $z+1$이 빨강색임은 자명하다(1이 빨강색이므로 초록색일 수 없고, 파랑색인 두 수는 차가 최소 2이다). 귀납적으로, $z+(2k+1)$과 $2k+1$이 빨강색일 때 $z+(2k+3)$과 $2k+3$도 (만일 둘 다 $[n]$에 들어간다면) 빨강색임을 보이자. 먼저

$$z + (2k+3) = (z + (2k+1)) + 2 = (z+2) + (2k+1)$$

이다. 따라서, $z + (2k+3)$은 빨강색이다. 또,

$$2k + 3 = (z + (2k+3)) - z = (z + (2k+1)) - (z-2)$$

이다. $z-2$는 2가 초록색이므로 파랑색 또는 초록색인데, z의 최소성에 의해 z는 파랑색일 수 없다. 즉, $z-2$는 초록색이고, $2k+3$은 빨강색이다. 이 방법으로 z보다 큰 모든 홀수가 빨강색임을 알 수 있다.

한편, $z-1$도 빨강색임을 쉽게 알 수 있다. 귀납적으로 $z-(2k+1)$과 $2k+1$이 빨강색일 때 (만일 둘 다 $[n]$에 들어간다면) $z-(2k+3)$과 $2k+3$도 빨강색임을 보이자.

$$2k + 3 = (z+2) - (z - (2k+1)) = 2 + (2k+1)$$

이므로 $2k+3$은 빨강색이고,

$$z - (2k+3) = (z-2) - (2k+1)$$

이므로 $z-(2k+3)$도 빨강색이다. 즉, z이하의 모든 홀수가 빨강색임을 알 수 있다.

결론적으로, R은 모든 홀수를 포함하고, 따라서 $|R| \geq n/2$인데 이것은 $|B| + |G| > n/2$라는데 모순된다. 즉, 처음 가정이 틀렸고 잘 칠하는 방법은 존재하지 않는다.