

POW 2009-10

2009학번 무학과 김호진

Find all real-valued continuous function f on the reals such that $f(x) = f(\cos x)$ for every real number x .

sol)

α 를 $\cos \alpha = \alpha$ 를 만족하는 실수라고 하자. (α 는 유일하다.)

$f(a) = f(\cos(a)) = f(\cos(\cos(a))) = \dots$ 이다. 수열 $\{C_n\}$ 이 $C_0 = a, C_n = \cos(C_{n-1})$ ($n > 0$) 으로 주어진다 면, $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ 가 (유일하게) 존재하는 경우에 $f(a) = f(C_1) = f(C_2) = \dots = f(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n)$ 이다.

이제 이 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ 이, C_0 값에 무관하게 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \alpha$ 에 수렴함을 보이자.

중간값 정리에 의해,

$$|C_{n+1} - \alpha| = |\cos C_n - \cos \alpha| = |\sin k| |C_n - \alpha| \leq |\sin 1| |C_n - \alpha|$$

이다. 여기서 k 는 $\min\{\alpha, C_n\} \leq k \leq \max\{\alpha, C_n\}$ 인 어떤 실수인데, $n > 0$ 이면 $C_n = \cos C_{n-1} \leq 1$ 이기 때문에 $k \leq 1$, $\sin k \leq \sin 1$ 이다. 그러므로 $r = \frac{1 + \sin 1}{2} < 1$ 에 대해,

$$|C_{n+1} - \alpha| \leq |\sin 1| |C_n - \alpha| < r |C_n - \alpha|$$

이라고 쓸 수 있다.

$$\therefore |C_n - \alpha| < r^n (C_0 - \alpha), \lim_{n \rightarrow \infty} (C_n - \alpha) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \alpha$$

그러면, 임의의 x 에 대해 $f(x) = f(\alpha)$ 가 되어, $f(x) \equiv C$ 임을 알 수 있다.