POW Problem 5 : Solution

Kim, Chiheon(Department of Mathematical Sciences)

2009년 3월 8일

편의상 원 둘레의 길이가 1이라고 하자. 이 때 원 위의 n개의 점의 convex hull의 interior가 원의 중심을 포함하지 않는다는 것은 n개의 점 중 어떤 한 점에서 시작하여 시계방향으로 그린 반원호가 모든 점을 덮는다는 것과 동치다 (단, 반원호의 다른 끝점은 이 반원호에 속하지 않은 것으로 본다). 이 때, 이 성질을 만족하는 점이 2개라면, 두 점에 해당하는 반원호가 각각 두 점을 모두 포함해야 하는데 한 끝이 열린 반원호로는 불가능하다. 따라서 이런 점은 단 하나 존재한다. 아래에서 쓰인 '반원호'라는 단어는 모두 한 끝이 열린 반원호를 지칭한다.

A를 n개의 점이 어떤 반원호로 덮이는 사건이라고 하고, B를 n개중 무작위로 택한 한 점에서 시작한 반원호가 나머지 점을 모두 덮는 사건이라고 하자. 그러면 $B \subset A$이다.

n개의 점 중 하나를 무작위로 택하여 그 점을 0으로 두고, 원주를 연속적으로 $[0, 1)$에 대응시키자. 그러면 나머지 점들의 위치를 $0 \leq X_1, \ldots, X_{n-1} < 1$로 나타낼 수 있다. 각각의 확률변수는 독립이고 균등분포(uniformly distributed) 되어 있다. 이 때 0에서 시작한 반원호가 나머지 모든 점을 덮을 확률은

$$\mathbb{P}(\max\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} < \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X_1 < \frac{1}{2}) \cdots \mathbb{P}(X_{n-1} < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

이다. 이 확률은 정확히 $\mathbb{P}(B)$이다. 한 편,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)$$

이다. 그런데 B를 만족하게 하는 점은 n개 중 단 하나 존재하므로, $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{n}$이다. 따라서

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B \mid A)} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

이다. 따라서 'n개 점의 convex hull의 interior가 원의 중심을 포함할 확률'은

$$1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

이다.