양해훈 POW#11

Q를 유리수들의 집합이라고 하고, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=r$이라 하자. 문제의 조건에 의해 $r\in Q$.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=r-\sqrt{d}$ 의 양변을 제곱하면

$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}=r^2+d-2r\sqrt{d}$

$r^2+d-a-b-c=2A$라고 두면, $A\in Q$이다. 위의 식을 정리하고 양변을 2로 나누면

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=A-r\sqrt{d}\cdots$①

①의 양변을 제곱하면

$ab+bc+ca+2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ca}+2c\sqrt{ab}=A^2+r^2d-2Ar\sqrt{d}$

$A^2+r^2d-ab-bc-ca=2B$라고 두면, $B\in Q$이다. 위의 식을 정리하고 양변을 2로 나누면

$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}=B-Ar\sqrt{d}\cdots$②

②의 양변을 제곱하면

$abc(a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca})=B^2+A^2r^2d-2ABr\sqrt{d}$

①에서

$2r(AB-abc)\sqrt{d}=B^2+A^2r^2d-a^2bc-b^2ca-c^2ab-2Aabc\cdots$③

$$A=\frac{r^2+d-a-b-c}{2}>\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-a-b-c}{2}$$
$$=\frac{a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}-a-b-c}{2}$$
$$=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 3\sqrt[3]{abc}>\sqrt[3]{abc}$$

$$B=\frac{A^2+r^2d-ab-bc-ca}{2}>\frac{(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})^2-ab-bc-ca}{2}$$
$$=\frac{ab+bc+ca+2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ca}+2c\sqrt{ab}-ab-bc-ca}{2}$$
$$=a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}>(\sqrt[3]{abc})^2$$

따라서 $AB>abc$, $2r(AB-abc)\neq 0$. ③의 양변을 $2r(AB-abc)$로 나누면

$$\sqrt{d}=\frac{B^2+A^2r^2d-a^2bc-b^2ca-c^2ab-2Aabc}{2r(AB-abc)}\in Q$$

같은 방법으로 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ 또한 유리수임을 증명할 수 있다. Q. E. D.