양해훈 POW 5 풀이

결론을 부정하여, 유한한 수의 소수들만이 어떤 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x) \equiv 0 \pmod p$가 해를 가지게 한다고 하자. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$라 하고, $f(x) \equiv 0 \pmod p$가 해를 가지게 하는 소수들을 $p_1, p_2, \cdots, p_k$라 하자. 그렇다면 임의의 정수 a에 대하여, $f(a)$가 p_i들 이외의 소수 q로 나누어떨어진다면, $f(a) \equiv 0 \pmod q$가 되므로 모순. 따라서 어떤 정수 a에 대해서도, 정수들 $\epsilon_{a1}, \epsilon_{a2}, \cdots, \epsilon_{ak}$가 존재하여 $f(a) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\epsilon_{ai}}$를 만족한다. 어떤 다항식에 정수를 대입해 나오는 모든 값이 $p_1, p_2, \cdots, p_k$로만 나누어떨어질 수 있다면 그 다항식을 A성질이 있다고 부르자. 이제 A성질을 가지는 이 다항식이 1차 이상이라면 모순이 일어남을 보일 것이다.

$a_0 = 0$이라면 $f(0) = 0$에서 가정에 모순이다. 따라서 $a_0 \neq 0$이라고 가정할 수 있다. $\{f(a_0 x) | x \in Z\} \subset \{f(x) | x \in Z\}$에서 $f(a_0 x)$도 A성질을 가진다.

또한, $f(a_0 x) = \sum_{i=0}^{n} a_i a_0^i x^i = a_0 \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i a_0^{i-1} x^i \right) + 1 \right\}$에서 $\frac{f(a_0 x)}{a_0}$는 x가 정수라면 정수값을 가질 것이며, $\frac{f(a_0 x)}{a_0} | f(a_0 x)$이므로 $\frac{f(a_0 x)}{a_0}$ 역시 A성질을 가진다.

이제 $g(x) = \frac{f(a_0 x \prod_{i=1}^{k} p_i)}{a_0}$이라 하자. 이 역시 $\{g(x) | x \in Z\} \subset \left\{ \frac{f(a_0 x)}{a_0} | x \in Z \right\}$에서 A성질을 가진다. 그리고 f의 차수가 1 이상이라면 g 또한 차수가 1 이상일 것이다.

하지만 $g(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i a_0^{i-1} x^i \left(\prod_{j=1}^{k} p_j \right)^i \right) + 1 = M(x) \times \prod_{j=1}^{k} p_j + 1$에서 g가 A성질을 가진다는 것은 모순. (M이 언제나 0이라면 g의 차수가 1 이상이라는 데 모순이다.) 따라서 원래의 가정이 잘못되었고, 본 문제는 증명되었다.