선 다발과 $\mathbb{C}^\times$-다발

박진현

2004년 10월 23일

아주 간단한 다음의 사실을 기록으로 남겨 두려고 한다.

정리 0.1. *X가 위상공간이라고 하자. 그러면, 다음의 일대일 대응이 있다:*

$$\{X \text{ 위의 복소 선 다발들}\} \leftrightarrow \{X \text{ 위의 } \mathbb{C}^\times\text{-다발들}\}$$

증명. X위의 선 다발을 만드는 것은 코사이클 조건을 만족하는 $\mathbb{C}^\times = GL_1(\mathbb{C})$값을 가지는 좌표편환함수들(transition functions) $\{g_{ij}\}$을 주는 것과 마찬가지이다. 이 사실을 염두에 두자.

$p : E \to X$를 각각의 올(fibre)이 $\mathbb{C}^\times$인 $\mathbb{C}^\times$-다발이라고 하자. 다발의 정의에 의해서 X의 적당한 덮개 $\{U_i\}$와, 이 위에서 정의된 함수 $\phi_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\simeq} U_i \times \mathbb{C}^\times$가 존재한다. 이 함수들은 가환그림

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times \mathbb{C}^\times \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

를 만족한다. 그러면 두개의 겹치는 열린 집합들 U_i와 U_j에 대해서 우리는

$$\begin{tikzcd}
& (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^\times \arrow[dr, "\phi_j \circ \phi_i^{-1}"] \arrow[ddl, "\pi_1"'] & \\
p^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[ur, "\phi_i"] \arrow[rr, "\phi_j"] \arrow[d, "p"'] & & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^\times \arrow[dll, "\pi_1"] \\
U_i \cap U_j & &
\end{tikzcd}$$

를 생각할 수 있고, 이때 함수 $\phi_j \circ \phi_i(x, \lambda) = (x, g_{ij}(x)\lambda)$로 쓰여질 수 있다.

$U_i \cap U_j$ 위에서 $(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) \circ (\phi_j \circ \phi_i^{-1}) = \mathrm{id}$이고, $U_i \cap U_j \cap U_k$위에서 $(\phi_i \circ \phi_k^{-1}) \circ (\phi_k \circ \phi_j^{-1}) \circ (\phi_j \circ \phi_i^{-1}) = \mathrm{id}$이므로, $g_{ij}g_{ji} = 1$, $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$이다. 즉, 이 함수들 g_{ij}가 코사이클 조건을 만족하므로 선 다발 하나를 결정한다.

반대로 어떤 덮개 U_i들과 코사이클 조건을 만족하는 함수들 g_{ij}들이 주어져 있다면, 이것들을 이용해서 $\mathbb{C}^\times$다발을 강제로 만들 수 있다.

$$\coprod_{i \in I} U_i \times \mathbb{C}^\times / \sim$$

을 생각하되, $(x, \lambda) \in U_i \times \mathbb{C}^\times, (y, \nu) \in U_j \times \mathbb{C}^\times$에 대해서 $(x, \lambda) \sim (y, \nu)$를 $x = y$, $\nu = g_{ij}(x)\lambda$로 정의하면, 이것은 $\mathbb{C}^\times$-다발이 된다. $\square$