

文章编号: 1001-246X(2016)01-0049-08

# 一维热传导方程热源反问题基于最小二乘法的正则化方法

吴自库<sup>1</sup>, 李福乐<sup>1</sup>, DO Young Kwak<sup>2</sup>

(1. 青岛农业大学理学与信息科学学院, 青岛; 2. 韩国科技学院数学系, 韩国 大田)

**摘 要:** 研究一维热传导方程热源反问题. 给出基于最小二乘支持向量机( LS-SVM) 求解的半解析表达式. 此外还给出一种参数调节方法以及算法稳定性的证明. 数值实验表明该方法具有较高的数值精度和稳定性.

**关键词:** 最小二乘支持向量机; 一维热传导方程; 源项反问题; 二次规划

中图分类号: O24

文献标志码: A

## 0 引言

自上世纪七十年代以来, 热传导方程反问题一直是反问题研究热点之一. 热传导方程反问题就是依据一些给定的条件来反演模型的未知参数, 这些参数可以是热扩散系数、边界条件、初始条件及热源项<sup>[1]</sup>. 研究较多的是逆时反问题和热源反问题. 热源反问题就是给定一些附加条件来反演热源项, 有关热源反问题的详细论述可参见 Isakov 的专著<sup>[2]</sup>. 由于热传导方程反问题是典型的不适定问题, 在求解时通常要采取正则化数值方法. 近年来针对热源反问题学者们提出了一些新的数值解法: 边界元方法<sup>[3]</sup>、有限元方法<sup>[4]</sup>、基本解方法<sup>[5]</sup>、拟可逆正则化方法<sup>[6]</sup>、快速稳定算法<sup>[7]</sup>等. 一维热传导方程热源反问题中要反演的热源函数为  $F(x, t)$ , 但在实际问题中都要对  $F(x, t)$  作必要的假设和简化:  $F(x, t) = f(t)g(x)$ . 如  $g(x)$  为常数, 则  $F(x, t)$  只是时间的函数<sup>[8]</sup>; 若  $f(t)$  为常数, 则  $F(x, t)$  只是空间的函数<sup>[9]</sup>.

近年来采取软计算方法解微分方程和优化问题成为一种新趋势, 常用的方法有无网格化方法<sup>[10]</sup>、人工神经网络(ANN)<sup>[11-14]</sup>及最小二乘支持向量机( LS-SVM)<sup>[15-18]</sup>等. 尽管在一定程度上, ANN 方法可以得到稳定的解, 但是人工神经网络方法存在两个致命不足之处, 即存在多个局部极值点和隐含层数的选择问题. LS-SVM 方法恰恰克服了 ANN 方法的缺点, 成为受欢迎的软计算方法之一, 目前已成功地应用于诸多领域. LS-SVM 方法之所以成功地求解微分方程并具有较高的精度和稳定性, 是因为其实际上是一种半解析的正则化方法. LS-SVM 方法用于求解微分方程正问题或反问题, 其基本原理是利用基核函数整体逼近问题的解, 然后利用基核函数的光滑性, 可灵活地布置样本点将问题转化为二次凸规划问题, 避免了繁琐的积分等运算. 在保证精度的前提下, 得到问题的近似解.

LS-SVM 方法已经成功地用于求解常微分方程, 但是该方法用于求解偏微分方程的工作很少, 反问题几乎是空白, 目前尚未见报导. 本文尝试将 LS-SVM 方法用于研究一维热传导方程热源反问题. 第一部分是 LS-SVM 正则化方法求解一维热传导方程热源反问题机制, 第二部分是参数调节机制及稳定性证明, 第三部分是数值实验, 最后一部分是结论.

## 1 LS-SVM 正则化方法求解一维热传导方程热源反问题机制

考虑如下一维热传导方程热源反问题

收稿日期: 2014-12-29; 修回日期: 2015-04-21

基金项目: 山东省高等学校优秀中青年骨干教师国际合作培养计划, 国家自然科学基金(61403233), 山东省自然科学基金(ZR2009AL012)资助项目

作者简介: 吴自库(1968-), 男, 博士, 教授, 从事应用数学研究, E-mail: zkwl968@126.com

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1], \\ u(0, t) = g_1(t), \quad u(1, t) = g_2(t), & t \in [0, 1] \\ u(x, 0) = g(x), & x \in [0, 1], \\ u(\hat{x}, t) = \phi(t), & \hat{x} \in (0, 1), \quad t \in [0, 1], \end{cases} \quad (1)$$

这里  $d$  为热扩散系数,  $f(t)$  为未知的依赖时间的热源函数,  $u(\hat{x}, t) = \phi(t)$  为附加条件.

已知函数  $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$ 、 $g(x)$ 、 $\phi(t)$  和未知函数  $f(t)$  需满足相容性条件

$$\begin{cases} g_1(0) = g(0), \quad g_2(0) = g(1), \\ \phi(0) = g(\hat{x}), \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

LS-SVM 用于解偏微分方程不同于其它数值方法, 其对区域的形状、边界、网格点分布没有要求, 适应性强. 为了反演未知热源函数  $f(t)$  和得到问题的近似解, 先要在研究区内设置样本点. 为此对区域  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  进行剖分, 得到样本点. 为方便起见, 记  $V = (x, t)$ ,  $\hat{V} = (\hat{x}, t)$ . 这里对空间进行  $N$  等分, 步长为  $h$ ; 对时间进行  $K$  等分, 步长为  $\tau$ . 因此内部节点数为  $M = N \times K$ , 将其按自然顺序排成一行  $\bar{V} = [V_1, V_2, \dots, V_M]^T$ ,  $V_i = (x_i, t_i)$ . 附加样本点:  $\hat{V}^* = [\hat{V}_1, \hat{V}_2, \dots, \hat{V}_K]^T$ ,  $\hat{V}_k = (\hat{x}, t_k)$ ,  $t_k = k\tau$ . 指标集:  $IX = \{1, 2, \dots, M\}$ ,  $IT = \{1, 2, \dots, K\}$ .

取方程 (1) 如下形式的近似解

$$\hat{u}(V) = A(V) + B(V) \left( \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(V, V_j) + b \right), \quad (3)$$

这里  $\Phi(U, V) = \exp(-\|U - V\|^2 / (2\sigma^2))$  为高斯核函数,  $\sigma$  是核函数宽度参数,  $\alpha_j$  和  $b$  为待定的回归参数.  $A(V) = A(x, t)$  为满足初、边值条件的已知函数, 而  $B(V) = B(x, t)$  则为在初、边值上均为 0 的已知函数.  $A(V)$  和  $B(V)$  不含任何回归参数, 可取如下函数

$$A(V) = (1-x)g_1(t) + xg_2(t) + (1-t)[g(x) - (1-x)g(0) - xg(1)], \quad (4)$$

$$B(V) = x(1-x)t. \quad (5)$$

同样可选取  $f(t)$  如下近似形式

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \varphi(t, \hat{t}_k) + \hat{b}, \quad (6)$$

这里高斯核函数  $\varphi(t, s) = \exp[-(t-s)^2 / (2\sigma^2)]$ ,  $\hat{\alpha}_k$  和  $\hat{b}$  为待定的回归参数. 将式 (3) 和 (6) 代入式 (1) 有

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j G(V, V_j) - \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \varphi(t, \hat{t}_k) + Q(V)b - \hat{b} + W(V) \approx 0, \quad (7)$$

这里

$$Q(V) = B_t(V) - dB_{xx}(V), \quad W(V) = A_t(V) - dA_{xx}(V),$$

$$G(V, V_j) = G_1(V, V_j) + G_2(V, V_j) + G_3(V, V_j) + G_4(V, V_j),$$

$$G_1(V, V_j) = Q(V)\Phi(V, V_j), \quad G_2(V, V_j) = B(V)\Phi_t(V, V_j),$$

$$G_3(V, V_j) = -2dB_x(V)\Phi_x(V, V_j), \quad G_4(V, V_j) = -dB(V)\Phi_{xx}(V, V_j).$$

将式 (6) 代入附加条件得

$$A(\hat{V}) + B(\hat{V}) \left( \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\hat{V}, V_j) + b \right) - \phi(t) \approx 0. \quad (8)$$

为求得回归参数, 将样本点代入式 (7), 将附加样本点代入式 (8). 于是, 问题由 LS-SVM 原理转化为求解如下二次规划问题

$$\min \frac{1}{2} (\alpha^T \alpha + \hat{\alpha}^T \hat{\alpha} + \gamma e^T e + \gamma \hat{e}^T \hat{e}), \quad (9)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^M \alpha_j G(V_i, V_j) - \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \varphi(t_i, \hat{t}_k) + Q(V_i)b - \hat{b} + W(V_i) + e_i = 0, \quad i \in IX, \quad (10)$$

$$A(\hat{V}_k) + B(\hat{V}_k) \left( \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\hat{V}_k, V_j) + b \right) - \phi(\hat{t}_k) + \hat{e}_k = 0, \quad k \in IK, \quad (11)$$

其中式(9)为目标函数, 式(10)和式(11)为约束条件;  $\gamma \in R^+$  是正则化参数,  $e$  和  $\hat{e}$  是偏差项. 上述优化问题的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L(\alpha, \hat{\alpha}, \rho, \hat{\rho}, b, \hat{b}, \eta, \hat{\eta}) = & \frac{1}{2}(\alpha^T \alpha + \hat{\alpha}^T \hat{\alpha} + \gamma e^T e + \gamma \hat{e}^T \hat{e}) - \\ & \sum_{i=1}^M \eta_i \left[ \sum_{j=1}^M \alpha_j G(V_i, V_j) - \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \varphi(t_i, \hat{t}_k) + Q(V_i) b - \hat{b} + W(V_i) + e_i \right] - \\ & \sum_{k=1}^K \hat{\eta}_k \left[ A(\hat{V}_k) + B(\hat{V}_k) \left( \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\hat{V}_k, V_j) + b \right) - \phi(\hat{t}_k) + \hat{e}_k \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

依据最优性条件(KKT)有

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = \alpha_i - \sum_{j=1}^M \eta_j G(V_j, V_i) - \sum_{j=1}^K \hat{\eta}_j B(\hat{V}_j) \Phi(\hat{V}_j, V_i) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = \hat{\alpha}_k + \sum_{j=1}^M \eta_j \varphi(t_j, \hat{t}_k) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial e_i} = \gamma e_i - \eta_i = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial e_k} = \gamma \hat{e}_k - \hat{\eta}_k = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = - \left[ \sum_{j=1}^M \alpha_j G(V_i, V_j) - \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \varphi(t_i, \hat{t}_k) + Q(V_i) b - \hat{b} + W(V_i) + e_i \right] = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \hat{\eta}_k} = - \left[ A(\hat{V}_k) + B(\hat{V}_k) \left( \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\hat{V}_k, V_j) + b \right) - \phi(\hat{t}_k) + \hat{e}_k \right] = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b} = - \sum_{j=1}^M \eta_j Q(V_j) - \sum_{j=1}^K \hat{\eta}_j B(\hat{V}_j) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \hat{b}} = \sum_{j=1}^M \eta_j = 0, \\ i \in IX, \quad k \in IT, \end{cases} \quad (13)$$

消去  $e_i$  及  $\hat{e}_k$ , 回归参数由下面方程组给出

$$\begin{bmatrix} -I_M & M_\eta^T & Z_M & Z_M^K & M_{\hat{\eta}} & Z_M \\ M_\eta & \frac{I_M}{\gamma} & \hat{Q} & -M_\varphi & Z_M^K & -U_M \\ Z_M^T & \hat{Q}^T & 0 & Z_K^T & \hat{B}^T & 0 \\ Z_K^M & M_\varphi^T & Z_K & I_K & Z_K^K & Z_K \\ M_\Phi^B & Z_K^M & \hat{B} & Z_K^K & \frac{I_K}{\gamma} & Z_K \\ Z_M^T & U_M^T & 0 & Z_K^T & Z_K^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \eta \\ b \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\eta} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_\eta \\ 0 \\ 0 \\ R_{\hat{\eta}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

这里  $Z_M$  及  $Z_K$  分别表示各分量都为 0 的  $M$  和  $K$  维列向量, 上标 T 表示转置,  $Z_M^K = (0)_{M \times K}$ ,  $U_M = (1, 1, \dots, 1)^T$  为各分量都为 1 的  $M$  维列向量,  $I_M$  为  $M$  阶单位矩阵,

$\hat{Q} = (Q(V_1), Q(V_2), \dots, Q(V_M))^T$ ,  $\hat{B} = (B(\hat{V}_1), B(\hat{V}_2), \dots, B(\hat{V}_K))^T$ ,  $\hat{b}_d = \text{diag}(B(\hat{V}_1), B(\hat{V}_2), \dots, B(\hat{V}_K))$  为对角矩阵,

$$\begin{aligned}
 M_\eta &= (G(V_i, V_j))_M \text{ 为 } M \text{ 阶矩阵, } M_\phi = (\Phi(V_i, \hat{V}_k))_{M \times K}, M_\eta^b = M_\phi \hat{b}_d, \\
 M_\varphi &= (\varphi(t_i, \hat{t}_k))_{M \times K}, M_\phi^B = \hat{B}_d M_\phi^T, R_\eta = -(W(V_1), W(V_2), \dots, W(V_M))^T, \\
 R_{\eta^*} &= (\phi(\hat{V}_1) - A(\hat{V}_1), \phi(\hat{V}_2) - A(\hat{V}_2), \dots, \phi(\hat{V}_K) - A(\hat{V}_K))^T.
 \end{aligned}$$

通过求解线性方程组(14),即可得到回归参数值.然后再由式(3)可求得任意点  $V = (x, t)$  处的近似解  $\hat{u}(V) = \hat{u}(x, t)$ ;由式(6)可求得任意时刻  $f(t)$  的近似解  $\hat{f}(t)$ .

## 2 参数调节机制与近似解的稳定性

### 2.1 参数调节、检验机制

方程(14)为含有  $2(M+K+1)$  个未知变量的线性方程组,很容易解出.然而解的精度依赖于3个模型参数,即正则化因子  $\gamma$  及高斯核宽度参数  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ .由于  $\gamma$  为正则化因子,这里可取为非常大的常数,于是只剩下高斯核宽度参数  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  为可调节参数.据式(10)和式(11)可知,偏差项的模可以作为调节参数  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的依据,于是有

$$\min_{\sigma_1, \sigma_2} Er(\sigma_1, \sigma_2), \quad (15)$$

$$Er(\sigma_1, \sigma_2) = \|e\|_\infty + \|\hat{e}\|_\infty = \frac{1}{\gamma}(\|\eta\|_\infty + \|\hat{\eta}\|_\infty). \quad (16)$$

### 2.2 近似解的稳定性

将  $u$  的近似解  $\hat{u}(x, t)$ 、 $f(t)$  的近似解  $\hat{f}(t)$  代入方程(1)的第一式和第四式,经整理得

$$Lu(V) = \sum_{j=1}^M \alpha_j G(V, V_j) - \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \varphi(t, \hat{t}_k) + Q(V)b - \hat{b} + W(V), \quad (17)$$

$$Lf(t) = A(\hat{x}, t) + B(\hat{x}, t) \left( \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\hat{V}, V_j) + b \right) - \phi(t). \quad (18)$$

显然  $\|Lu(V)\|_\infty$  和  $\|Lf(t)\|_\infty$  可以作为衡量源项反问题解的稳定性和精度的指标.由于  $Lu(V)$  和  $Lf(t)$  均连续可微,且在边界上均为零,因而  $\|Lu(V)\|_\infty$  和  $\|Lf(t)\|_\infty$  均在内部取得.不妨令

$$\|Lu(V)\|_\infty = |Lu(x^*, t^*)|, \quad (x^*, t^*) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad (19)$$

$$\|Lf(t)\|_\infty = |Lf(t^*)|, \quad t^* \in (0, 1). \quad (20)$$

令距离  $(x^*, t^*)$  最近的样本点为  $V^* = (x_{i_0}, t_{i_0})$ 、距离  $t^*$  最近的附加样本点为  $\hat{t}_{k_0}$ .于是有

$$\begin{aligned}
 \|Lu(V)\|_\infty &= |Lu(x^*, t^*) - Lu(x_{i_0}, t_{i_0}) + Lu(x_{i_0}, t_{i_0})| \leq \\
 &|Lu(x^*, t^*) - Lu(x_{i_0}, t_{i_0})| + |Lu(x_{i_0}, t_{i_0})| \leq M_d(\tau + h) + \|e\|, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|Lf(t)\|_\infty &= |Lf(t^*) - Lf(\hat{t}_{k_0}) + Lf(\hat{t}_{k_0})| \leq \\
 &|Lf(t^*) - Lf(\hat{t}_{k_0})| + |Lf(\hat{t}_{k_0})| \leq M_t \tau + \|\hat{e}_k\|, \quad (22)
 \end{aligned}$$

这里  $M_d, M_t$  为正常数,  $M_d = \max\{\|Lu_x(V)\|_\infty, \|Lu_t(V)\|_\infty\}$ ,  $M_t = \|Lf'(t)\|_\infty$ .由式(21)和(22)可得本算法是稳定和收敛的.

## 3 数值实验

这里选取如下实例作正问题和反问题的数值实验:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6t, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(0, t) = 5, \quad u(1, t) = 19/4 - 3t, & t \in (0, 1], \\ u(x, 0) = 5 - x^4/4, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(0, t) = 5, \quad u(1, t) = 19/4 - 3t, & t \in (0, 1], \\ u(x, 0) = 5 - x^4/4, & x \in [0, 1], \\ u(\hat{x}^2, t) = 5 - 3t\hat{x}^2 + \hat{x}^4/4, & \hat{x} \in (0, 1), \quad t \in (0, 1]. \end{cases} \quad (24)$$

正问题(23)的解析解为  $u(x, t) = 5 - 3tx^2 - x^4/4$ , 反问题(24)的附加条件通过此式给出. 反问题(24)的核心问题就是反演未知源函数  $f(t)$ , 并解方程. 为了检验 LS-SVM 方法解一维热传导方程源项反问题的能力, 首先对正问题(23)进行求解, 其机制同反问题类似且比反问题简单些, 限于篇幅这里不再给出具体公式. 这里给出两个数值实验(D01, D02)的结果, 见表1和图1. 表中  $u^A$  表示解析解,  $u^L$  表示 LS-SVM 近似解. 仿真结果显示, 该方法具有较高的精度和可靠性, 而且没有复杂的积分、微分计算, 只需要解一个线性方程组. 因此 LS-SVM 正则化方法用于求解一维热传导方程完全可行.

表 1 LS-SVM 方法数值仿真正问题结果

Table 1 Numerical results of LS-SVM method for a direct problem

实验	$h$	$\tau$	$M$	$\ u^A - u^L\ _\infty$	平均误差	$\sigma^2$
D01	0.1	0.1	81	$2.64 \times 10^{-5}$	$5.74 \times 10^{-6}$	0.395
D02	0.05	0.05	161	$6.32 \times 10^{-6}$	$1.82 \times 10^{-6}$	0.575

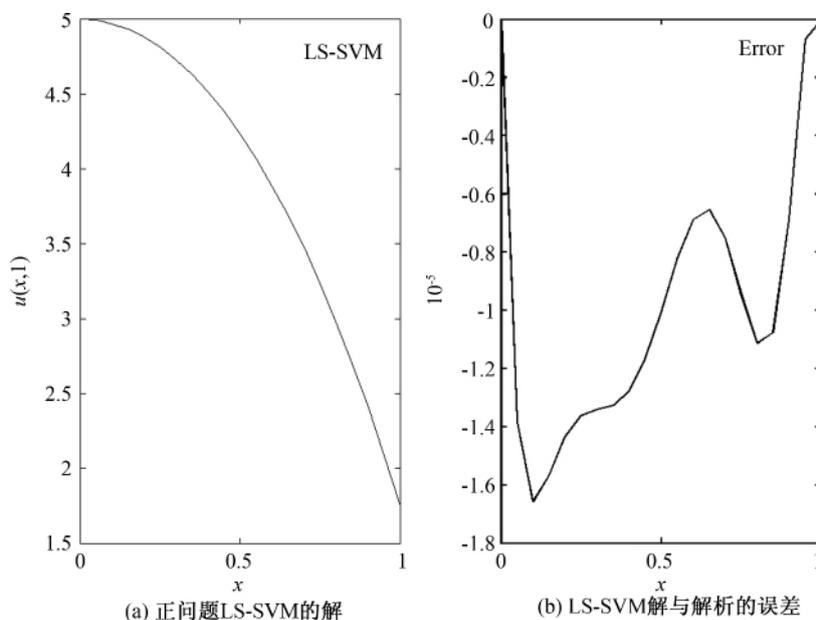


图 1 数值实验 D02 的仿真结果

Fig. 1 Numerical results of D02 (The left is LS-SVM approximate solution of the direct problem.)

为了检验本方法的反演能力, 这里设计了 10 个数值实验, 分别记为 I01, I02, ..., I10. 其中前八个实验附加条件在  $\hat{x} = 1/2$  处, 最后两个在  $\hat{x} = 1/4$  处. I07 和 I08 中观测数据加上了 1% 的随机误差. 仿真结果显示本方法反演能力较强, 并且具有较好的稳定性, 见表 2 和图 2 ~ 图 4. 在其它条件相同的情况下,  $\tau$  越小, 反演精度越低, 这是因为未知变量的个数越多的缘故. 训练点的个数越多, 核宽度取值越大. 在 I09 和 I10 中核参数未调节, 分别取为相应实验 I01 和 I05 中的参数值, 结果变化很小, 这说明本方法的稳定性好, 对附加点取在哪里不敏感. 在 I07 和 I08 中, 由于观测数据加上了 1% 的随机误差, 反演精度有所下降, 但未知源函数的相对误差仍在 1% 以内, 这说明该方法有较好的抗噪能力.

表 2 LS-SVM 方法数值仿真反问题结果

Table 2 Numerical results of LS-SVM method for an inverse problem

实验	$h$	$\tau$	$M$	观测误差 / %	$\ u^A - u^L\ _\infty$	$\ f^R - f^L\ _\infty$	$\sigma^2$	$\hat{\sigma}^2$
I01	0.1	0.1	81	0	$7.42 \times 10^{-5}$	$2.70 \times 10^{-3}$	0.20	0.025
I02	0.1	0.05	171	0	$8.19 \times 10^{-4}$	$1.84 \times 10^{-2}$	0.28	0.034
I03	0.1	0.025	351	0	$8.46 \times 10^{-4}$	$1.94 \times 10^{-2}$	0.36	0.039
I04	0.05	0.1	171	0	$6.50 \times 10^{-5}$	$1.04 \times 10^{-3}$	0.24	0.033
I05	0.05	0.05	361	0	$7.45 \times 10^{-4}$	$1.29 \times 10^{-2}$	0.69	0.035
I06	0.05	0.025	551	0	$7.66 \times 10^{-4}$	$1.47 \times 10^{-2}$	0.70	0.044
I07	0.1	0.1	81	1	$5.50 \times 10^{-3}$	$5.12 \times 10^{-2}$	1.41	0.068
I08	0.05	0.05	171	1	$1.22 \times 10^{-2}$	$1.17 \times 10^{-1}$	1.61	0.071
I09	0.1	0.1	81	0	$8.93 \times 10^{-5}$	$2.40 \times 10^{-3}$	0.20	0.025
I10	0.05	0.05	361	0	$8.64 \times 10^{-4}$	$1.46 \times 10^{-2}$	0.69	0.035

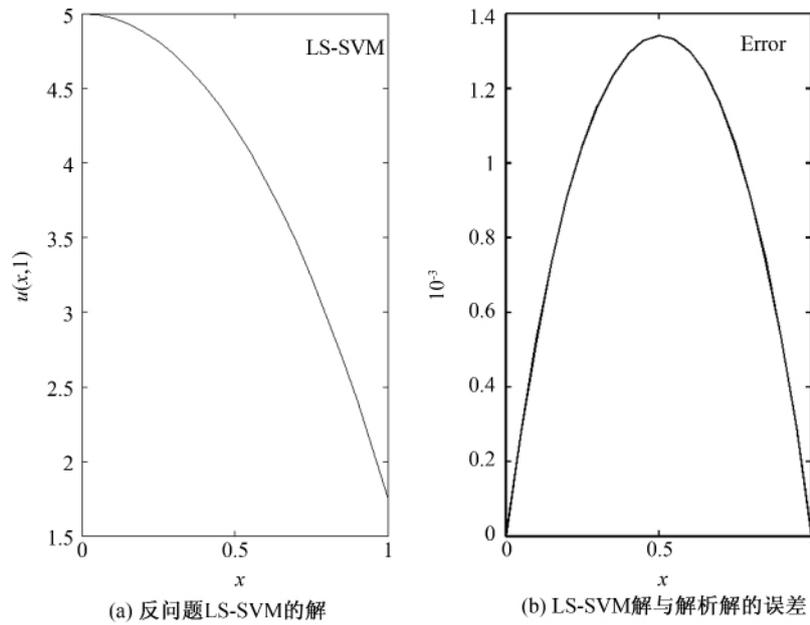


图 2 数值实验 I05 的仿真结果

Fig. 2 Numerical results of I05 ( The left is LS-SVM approximate solution of the direct problem. )

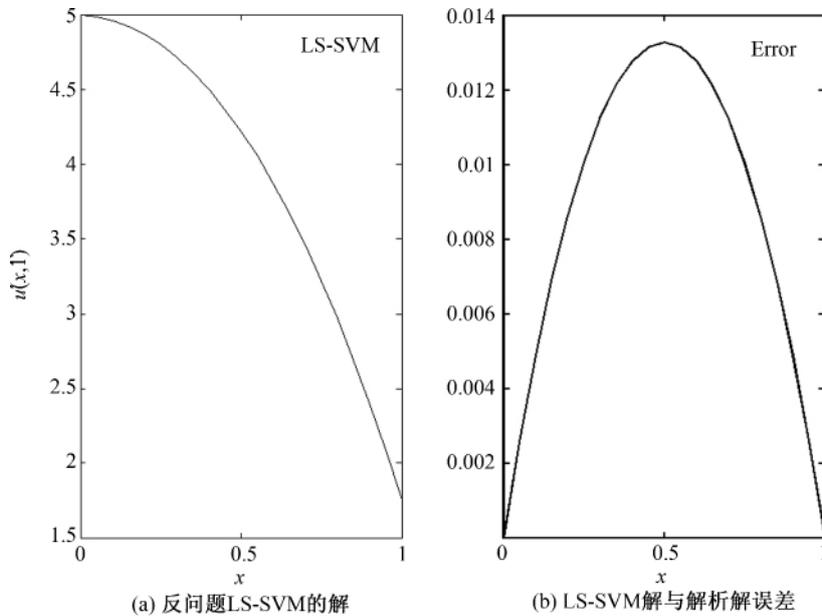


图 3 数值实验 I08 的仿真结果

Fig. 3 Numerical results of I08( The left is LS-SVM approximate solution of the direct problem. )

## 4 结论

利用 LS-SVM 研究了一维热传导热源反问题, 推导了反演未知源函数的公式, 给出了半解析解的形式. 这种方法理论完备, 省去了繁琐的积分微分运算, 应用便捷. 在数值实验中, 我们设计了一系列实验, 以检验该方法的有效性. 数值实验结果显示该方法能成功地反演出未知源函数, 并具有较高的精度和较好的稳定性. 我们相信, 该方法完全可以用于其他类型的一些反问题.

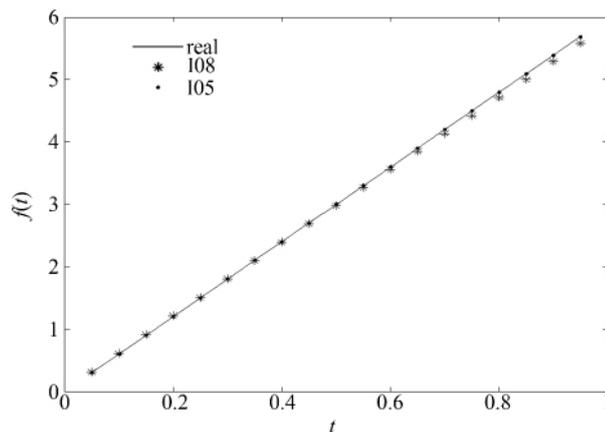


图 4 未知函数反演结果与真实结果比较

Fig. 4 Comparison of an inversed function and real function

## 参 考 文 献

- [ 1 ] ALIFANOV O M. Inverse heat transfer problems [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1994: 1 – 136.
- [ 2 ] ISAKOV V. Inverse source problem [M]. Providence: American Mathematical Society, 1990: 1 – 112.
- [ 3 ] FARCAS A, LESNIC D. Boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2006, 54: 375 – 388.
- [ 4 ] KRZYSTOF G, RENATA L. Different finite element approaches for inverse heat conduction problems [J]. Inverse Problems in Science and Engineering, 2010, 18( 1): 3 – 17.
- [ 5 ] JIN B T, MARIN L. The method of fundamental solutions for inverse source problems associated with the steady-state heat conduction [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 69: 1570 – 1589.
- [ 6 ] 杨帆, 万诗敏, 李敦刚. 含对流项抛物方程的热源识别的拟逆正则化方法 [J]. 兰州理工大学学报, 2009, 35( 4): 146 – 148.
- [ 7 ] 肖庭延, 张俊丽. 一类热传导问题源项识别的快速稳定算法 [J]. 计算物理, 2008, 25( 3): 336 – 343.
- [ 8 ] JOHANSSON T, LESNIC D. Determination of a space-wise dependent heat source [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 209: 66 – 80.
- [ 9 ] YAN Liang, FU Chuli, YANG Fenglian. The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2008, 2: 216 – 222.
- [10] 程荣军, 程玉民. 带源参数热的传导反问题的无网格方法 [J]. 物理学报, 2007, 56( 1): 5569 – 5574.
- [11] LAGARIS I E, LIKAS A, FOTIADIS D I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations [J]. IEEE Trans. Neural Networks, 1998, 9( 5): 987 – 1000.
- [12] LAGARIS I E, LIKAS A, PAPAGEORGIO D G. Neural-network methods for boundary value problems with irregular boundaries [J]. IEEE Trans Neural Networks, 2000, 11( 5): 1041 – 1049.
- [13] BAYMANI M, KERAYECHIAN A, EFFATI S. Artificial neural networks approach for solving Stokes problem [J]. Applied Mathematics, 2010, 1: 288 – 292.
- [14] ALLI H, UCAR A, DEMIR Y. The solutions of vibration control problems using artificial neural networks [J]. Journal of the Franklin Institute, 2003, 340: 307 – 325.
- [15] MEHRKANOON S, SUYKENS J A K. LS-SVM approximate solution to linear time varying descriptor systems [J]. Automatica, 2012, 48( 10): 2502 – 2511.
- [16] MEHRKANOON S, FALCK T, SUYKENS J A K. Approximate solution to ordinary differential equations using least squares support vector machines [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23( 9): 1356 – 1367.
- [17] MEHRKANOON S, MEHRKANOON S, SUYKENS J A K. Parameter estimation of delay differential equations: An integration-free LS-SVM approach [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2014, 19: 830 – 841.
- [18] 张国山, 王一鸣, 王世伟. 常微分方程近似解的 LS-SVM 改进算法 [J]. 系统科学与数学, 2013, 33( 6): 695 – 707.

## Least Squares Regularized Method for One-Dimensional Source Inverse Heat Conduction Problem

WU Ziku<sup>1</sup>, LI Fule<sup>1</sup>, DO Young Kwak<sup>2</sup>

(1. *Science and Information College, Qingdao Agricultural University, Qingdao, China;*

2. *Department of Mathematical Sciences, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon, Korea*)

**Abstract:** We deal with one-dimensional source inverse heat conduction equation. An approach based on least squares support vector machines (LS-SVM) is proposed for semi-analytic approximate solutions. Furthermore, a parameters tuning formulism is shown and stability of the method is presented. The method yields high accuracy and stability solutions in practical examples.

**Key words:** least squares support vector machines; one-dimensional heat conduction equation; source inverse problem; quadratic programming