

# 一维热传导方程热源反问题最小二乘 支持向量机近似求解\*

吴自库<sup>1)</sup> 李福乐<sup>1)†</sup> Do Young Kwak<sup>2)</sup>

1) (青岛农业大学理学与信息科学学院, 青岛 266109)

2) (韩国科技学院数学系, 韩国大田 305701)

本文研究了一维热传导方程热源反问题, 给出了基于最小二乘支持向量机(LS-SVM)求解该问题的半解析表达式, 此外还给出了一种参数调节方法. 数值仿真结果表明该方法具有较高的数值精度和稳定性.

**关键词:** 最小二乘支持向量机, 一维热传导方程, 源项反问题, 二次规划, 近似解

**PACS:** 02.30.Zz, 02.30.Jr, 02.30.Mv, 02.60.Cb

## 1 引言

对热传导方程的研究, 近年来人们关注更多的是其反问题. 由于热传导方程反问题独特的性质和应用价值, 一直是反问题研究热点之一[1-10]. 热传导方程反问题就是依据一些给定的条件来反演模型的未知参数, 这些参数可以是热传导系数、边界条件、初始条件及热源项[11], 研究较多的是逆时反问题和热源反问题. 逆时反问题就是给定某个时刻温度场来反演初始温度场, 而热源反问题就是给定一些附加条件来反演热源.

由于热传导方程反问题是典型的不适定问题, 在求解时通常要采取正则化方法. 求解热传导方程反问题的方法有很多, 例如积分变换法、伴随同化法、有限差分法、有限元法等. 近年来采取软计算方法

---

\* 山东省高等学校优秀中青年骨干教师国际合作培养计划, 国家自然科学基金(批准号: 61403233)和山东省自然科学基金(批准号: ZR2009AL012)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lhf2004666@126.com 电话: 13475809931

解微分方程和优化问题成为一种新趋势,常用的方法有人工神经网络(ANN)[12-15]和最小二乘支持向量机(LS-SVM)[16-18]. 尽管在一定程度上, ANN 方法可以得到稳定的解,但是人工神经网络方法存在两个不足之处,即存在多个局部极值点和隐含层数的选择问题. LS-SVM方法恰恰克服了ANN方法的缺点,成为受欢迎的软计算方法之一,目前已成功地应用于诸多领域. LS-SVM方法之所以成功地求解微分方程并具有较高的精度和稳定性,是因为其实际上是一种半解析的正则化方法.

LS-SVM方法已经成功地用于求解常微分方程,但是该方法用于求解偏微分方程的工作不是很多,尤其是反问题,本文将利用LS-SVM方法研究一维热传导方程热源反问题.

## 2 LS-SVM求解一维热传导方程热源反问题机制

考虑如下一维热传导方程热源反问题:

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(t), & (x,t) \in (0,1) \times (0,1), \\ u(0,t) = g_1(t), u(1,t) = g_2(t), & t \in [0,1], \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,1], \\ u(\hat{x},t) = \varphi(t), & \hat{x} \in (0,1), t \in [0,1]. \end{cases} \quad (1)$$

这里 $d$ 为热传导系数, $f(t)$ 为未知的依赖时间的热源函数, $u(\hat{x},t) = \varphi(t)$ 为附加条件. 已知函数 $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$ ,  $g(x)$ ,  $\varphi(t)$ 和未知函数 $f(t)$ 需满足相容性条件:

$$\begin{cases} g_1(0) = g(0), g_2(0) = g(1), \\ \varphi(0) = g(\hat{x}), \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

为方便起见,记 $V = v(x,t)$ ,  $\hat{V} = (\hat{x},t)$ . 为了反演 $f(t)$ ,先对区域进行分割. 首先对区域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ 进行分割:对空间进行 $N$ 等分,步长为 $h$ ;对时间进行 $K$ 等分,步长为 $\tau$ ,因此内部节点数为 $M = N \times K$ . 将其按自然顺序排列,即按从左到右,由下而上的规则排序. 排成一列 $\bar{V} = [V_1, V_2, \dots, V_M]^T$ ,  $V_i = (x_i, t_i)$ ; 附加点:  $\hat{V}^* = [\hat{V}_1, \hat{V}_2, \dots, \hat{V}_K]^T$ ,  $\hat{V}_k = (\hat{x}, \hat{t}_k)$ ; 指标集:  $IX = \{1, 2, \dots, M\}$ ,  $IT = \{1, 2, \dots, K\}$ .

取方程(1)如下形式的近似解:

$$\hat{u}(V) = A(V) + B(V) \left( \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(V, V_j) + b \right), \quad (3)$$

这里 $\Phi(U, V) = \exp(-\frac{\|U-V\|^2}{2\sigma^2})$ 为高斯核函数,  $\sigma$ 是核函数宽度参数,  $\alpha_j$ 和 $b$ 为待定的回归参数.  $A(V) = A(x, t)$ 为满足初、边值条件的已知函数,而 $B(V) = B(x, t)$ 则为在初、边值上均为0的已知函数.  $A(V)$ 和 $B(V)$ 不含

任何回归参数, 可取如下函数:

$$A(V) = (1-x)g_1(t) + xg_2(t) + (1-t)[g(x) - (1-x)g(0) - xg(1)], \quad (4)$$

$$B(V) = x(1-x)t, \quad (5)$$

同样可选取 $f(t)$  如下近似形式:

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \phi(t, \hat{t}_k) + \hat{b}, \quad (6)$$

这里高斯核函数 $\phi(t, s) = \exp(-\frac{(t-s)^2}{2\sigma^2})$ ,  $\hat{t}_k = k\tau$ ,  $\hat{\alpha}_k$  和 $\hat{b}$  为待定的回归参数. 将(3) 和(6) 代入(1) 得:

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j G(V, V_j) - \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \phi(t, \hat{t}_k) + Q(V)b - \hat{b} + W(V) \approx 0, \quad (7)$$

这里

$$Q(V) = B_t(V) - dB_{xx}(V), \quad W(V) = A_t(V) - dA_{xx}(V),$$

$$G(V, V_j) = G_1(V, V_j) + G_2(V, V_j) + G_3(V, V_j) + G_4(V, V_j),$$

$$G_1(V, V_j) = Q(V)\Phi(V, V_j), \quad G_2(V, V_j) = B(V)\Phi_t(V, V_j),$$

$$G_3(V, V_j) = -2dB_x(V)\Phi_x(V, V_j), \quad G_4(V, V_j) = -dB(V)\Phi_{xx}(V, V_j).$$

将(6) 代入附加条件得:

$$A(\hat{V}) + B(\hat{V})(\sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\hat{V}, V_j) + b) - \varphi(t) \approx 0, \quad (8)$$

为求得回归参数, 将内部节点代入式(7), 将附加点代入式(8). 于是, 问题由LS-SVM 原理转化为求解如下二次规划问题:

$$\min \frac{1}{2}(\alpha^T \alpha + \hat{\alpha}^T \hat{\alpha} + \gamma e^T e + \gamma \hat{e}^T \hat{e}), \quad (9)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^M \alpha_j G(V_i, V_j) - \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \phi(t_i, \hat{t}_k) + Q(V_i)b - \hat{b} + W(V_i) + e_i = 0, \quad i \in IX, \quad (10)$$

$$A(\hat{V}_k) + B(\hat{V}_k)(\sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\hat{V}_k, V_j) + b) - \varphi(\hat{t}_k) + \hat{e}_k = 0, \quad k \in IT, \quad (11)$$

其中式(9) 为目标函数, 式(10) 和式(11) 为约束条件;  $\gamma \in R^+$  为正则化参数,  $e_i$  和 $\hat{e}_k$  是偏差项. 上述优化问题的拉格朗日函数为:

$$L(\alpha, \hat{\alpha}, e, \hat{e}, b, \hat{b}, \eta, \hat{\eta}) = \frac{1}{2}(\alpha^T \alpha + \hat{\alpha}^T \hat{\alpha} + \gamma e^T e + \gamma \hat{e}^T \hat{e}) - \sum_{i=1}^M \eta_i [\sum_{j=1}^M \alpha_j G(V_i, V_j) - \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \phi(t_i, \hat{t}_k) + Q(V_i)b - \hat{b} + W(V_i) + e_i] \quad (12)$$

$$- \sum_{k=1}^K \hat{\eta}_k [A(\hat{V}_k) + B(\hat{V}_k) (\sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\hat{V}_k, V_j) + b) - \varphi(\hat{t}_k) + \hat{e}_k].$$

依据最优性条件(KKT)有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} &= \alpha_i - \sum_{j=1}^M \eta_j G(V_j, V_i) - \sum_{j=1}^K \hat{\eta}_j B(\hat{V}_j) \Phi(\hat{V}_j, V_i) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_k^*} &= \hat{\alpha}_k + \sum_{j=1}^M \eta_j \phi(t_j, \hat{t}_k) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial e_i} &= \gamma e_i - \eta_i = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial e_k^*} &= \gamma \hat{e}_k - \hat{\eta}_k = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \eta_i} &= -[\sum_{j=1}^M \alpha_j G(V_i, V_j) - \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \phi(t_i, \hat{t}_k) + Q(V_i) b - \hat{b} + W(V_i) + e_i] = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \hat{\eta}_k} &= -[A(\hat{V}_k) + B(\hat{V}_k) (\sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\hat{V}_k, V_j) + b) - \varphi(\hat{t}_k) + \hat{e}_k], \\ \frac{\partial L}{\partial b} &= -\sum_{j=1}^M \eta_j Q(V_j) - \sum_{j=1}^K \hat{\eta}_j B(\hat{V}_j) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \hat{b}} &= \sum_{j=1}^M \eta_j = 0, \\ i &\in IX, \quad K \in IT. \end{aligned} \tag{13}$$

消去 $e_i$ 及 $\hat{e}_k$ , 回归参数由下面方程组给出:

$$\begin{bmatrix} -I_M & M_\eta^T & Z_M & Z_M^K & M_{\hat{\eta}} & Z_M \\ M_\eta & I_M^\gamma & \hat{Q} & -M_\phi & Z_M^K & -U_M \\ Z_M^T & \hat{Q}^T & 0 & Z_K^T & \hat{B}^T & 0 \\ Z_K^M & M_\phi^T & Z_K & I_K & Z_K^K & Z_K \\ M_\phi^B & Z_K^M & \hat{B} & Z_K^K & I_K^\gamma & Z_K \\ Z_M^T & U_M^T & 0 & Z_K^T & Z_K^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \eta \\ b \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\eta} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_\eta \\ 0 \\ 0 \\ R_{\hat{\eta}} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

这里 $Z_M$ 及 $Z_K$ 分别表示各分量都为0的 $M$ 和 $K$ 维列向量, 上标 $T$ 表示转置,  $Z_M^K = (0)_{M \times K}$ ,  $U_M = (1, 1, \dots, 1)^T$ 为各分量都为1的 $M$ 维列向量,  $I_M$ 为 $M$ 阶单位矩阵,  $\hat{Q} = (Q(V_1), Q(V_2), \dots, Q(V_M))^T$ ,  $\hat{B} = (B(\hat{V}_1), B(\hat{V}_2), \dots, B(\hat{V}_K))^T$ ,  $\hat{B}_d = \text{diag}(B(\hat{V}_1), B(\hat{V}_2), \dots, B(\hat{V}_K))$ 为对角矩阵,  $M_\eta = (G(V_i, V_j))_M$ 为 $M$ 阶矩阵,  $M_\phi = (\phi(t_i, \hat{t}_k))_{M \times K}$ ,  $M_\phi^B = \hat{B}_d M_\phi^T$ ,  $R_\eta = -(W(V_1), W(V_2), \dots, W(V_M))^T$ ,  $R_{\hat{\eta}} = (\varphi(\hat{V}_1) - A(\hat{V}_1), \varphi(\hat{V}_2) - A(\hat{V}_2), \dots, \varphi(\hat{V}_K) - A(\hat{V}_K))^T$ .

通过求解线性方程组(14), 即可解得回归参数值. 然后再由式(3)可求得任意点 $V = (x, t)$ 处的近似解 $\hat{u}(V) = \hat{u}(x, t)$ ; 由式(6)可求得任意时刻 $f(t)$ 的近似解 $\hat{f}(t)$ .

### 3 参数调节与检验机制

方程(14)为含有 $2(M+K+1)$ 个未知变量的线性方程组,很容易解出.然而解的精度依赖于3个模型参数,即正则化因子 $\gamma$ 及高斯核宽度参数 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ .由于 $\gamma$ 为正则化因子,这里取为非常大的常数.于是只剩下高斯核宽度参数 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 为可调节参数.给定一组参数,便可得到方程及未知函数的近似解,这里采用Crank-Nicolson 差分方法优化可调节参数.新的空间、时间步长仍记为 $h$ 和 $\tau$ ,并记 $u_i^k = u(ih, k\tau)$ ,  $f_k = f(k\tau)$ .采用Crank-Nicolson 差分方法离散方程(1),于是有

$$\min_{\sigma_1, \sigma_2} \|E_i^k\|_{\infty}, \quad (15)$$

$$E_i^k = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - \frac{1}{2}(f_k + f_{k+1}) - \frac{d}{2h^2}[(u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) - (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)], \quad (16)$$

这里 $u_i^k = A(V_i^k) + B(V_i^k)(\sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(V_i^k, V_j) + b)$ ,  $f_k = \sum_{j=1}^K \hat{\alpha} \phi(t_k, \hat{t}_j) + \hat{b}$ ,  $V_i^k = (x_i, t_k)$ .由Crank-Nicolson 差分方法的理论可知 $\|E_i^k\|_{\infty} = O(\tau^2 + h^2)$ ,因此 $\|E_i^k\|_{\infty}$ 可作为优化可调节参数的依据.

### 4 仿真实例

这里选取如下例子作为正问题和反问题的仿真实例:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6t, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(0, t) = 5, u(1, t) = \frac{19}{4} - 3t, & t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{4}x^4, & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (17)$$

和

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(0, t) = 5, u(1, t) = \frac{19}{4} - 3t, & t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{4}x^4, & x \in [0, 1], \\ u(\hat{x}^2, t) = 5 - 3t\hat{x}^2 + \frac{1}{4}\hat{x}^4, & \hat{x} \in (0, 1), t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (18)$$

正问题(17)的解析解为 $u(x, t) = 5 - 3tx^2 - \frac{1}{4}x^4$ ,反问题的附加条件通过此式给出.反问题(18)的核心问题就是反演未知源函数 $f(t)$ ,并解方程.为了检验LS-SVM方法求解一维热传导方程的能力,首先对正问题(17)进行求解,其机制同反问题类似且比反问题简单些,限于篇幅这里不再给出具体公式.此处给出两个仿真实验(D01, D02)的结果,见表1和图1.表中 $u^A$ 表示解析解,  $u^L$ 表示LS-SVM近似解.仿真结果显示,该方法具有较高的精度和可靠性,用于求解一维热传导方程完全可行.

为了检验本方法的反演能力, 这里设计了10个数值实验, 分别记为I01, I02,  $\dots$ , I10. 其中前八个实验附加条件在 $\hat{x} = \frac{1}{2}$ 处, 最后两个在 $\hat{x} = \frac{1}{4}$ 处. I07和I08中观测数据加上了1%的随机误差. 仿真结果显示本方法反演能力较强, 并且具有较好的稳定性, 见表2和图2-4. 在其它条件相同的情况下,  $\tau$ 越小, 反演精度越低, 这是因为未知变量的个数越多的缘故. 训练点的个数越多, 和宽度取值越大. 在I09和I10中核参数未调节, 分别取为相应实验I01和I05中的参数值, 结果变化很小, 这说明本方法的稳定性好, 对附加点取在哪里不敏感. 在I07和I08中, 由于观测数据加上了1%的随机误差, 反演精度有所下降, 但未知源函数的相对误差仍在1%以内, 这说明该方法有较好的抗噪能力.

表1 LS-SVM方法数值仿真正问题结果

实验	$h$	$\tau$	$M$	$\ u^A - u^L\ _\infty$	平均误差	$\sigma^2$
D01	0.1	0.1	81	2.64e-5	5.74e-6	0.395
D02	0.05	0.05	161	6.32e-6	1.82e-6	0.575

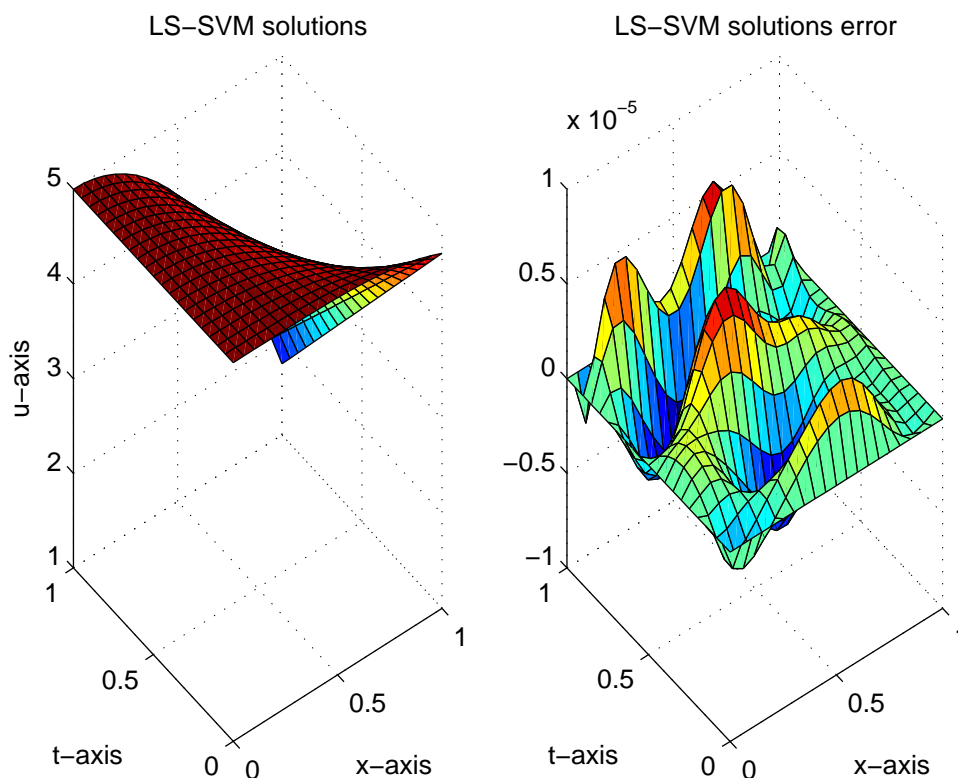


图1 数值实验D02的仿真结果 左图: 正问题LS-SVM的解 右图: LS-SVM解与解析解的误差

表2 LS-SVM方法数值仿真反问题结果

实验	$h$	$\tau$	$M$	观测误差	$\ u^A - u^L\ _\infty$	$\ f^R - f^L\ _\infty$	$\sigma^2$	$\hat{\sigma}^2$
I01	0.1	0.1	81	0%	7.42e-5	2.70e-3	0.20	0.025
I02	0.05	0.05	161	0%	8.19e-4	1.84e-2	0.28	0.034
I03	0.1	0.025	351	0%	8.46e-4	1.94e-2	0.36	0.039
I04	0.05	0.1	171	0%	6.50e-5	1.04e-3	0.24	0.033
I05	0.05	0.05	361	0%	7.45e-4	1.29e-2	0.69	0.035
I06	0.05	0.025	551	0%	7.66e-4	1.47e-2	0.70	0.044
I07	0.1	0.1	81	1%	5.50e-3	5.12e-2	1.41	0.068
I08	0.05	0.05	171	1%	1.22e-2	1.17e-1	1.61	0.071
I09	0.1	0.1	81	0%	8.93e-5	2.40e-3	0.20	0.025
I10	0.05	0.05	361	0%	8.64e-4	1.46e-2	0.69	0.035

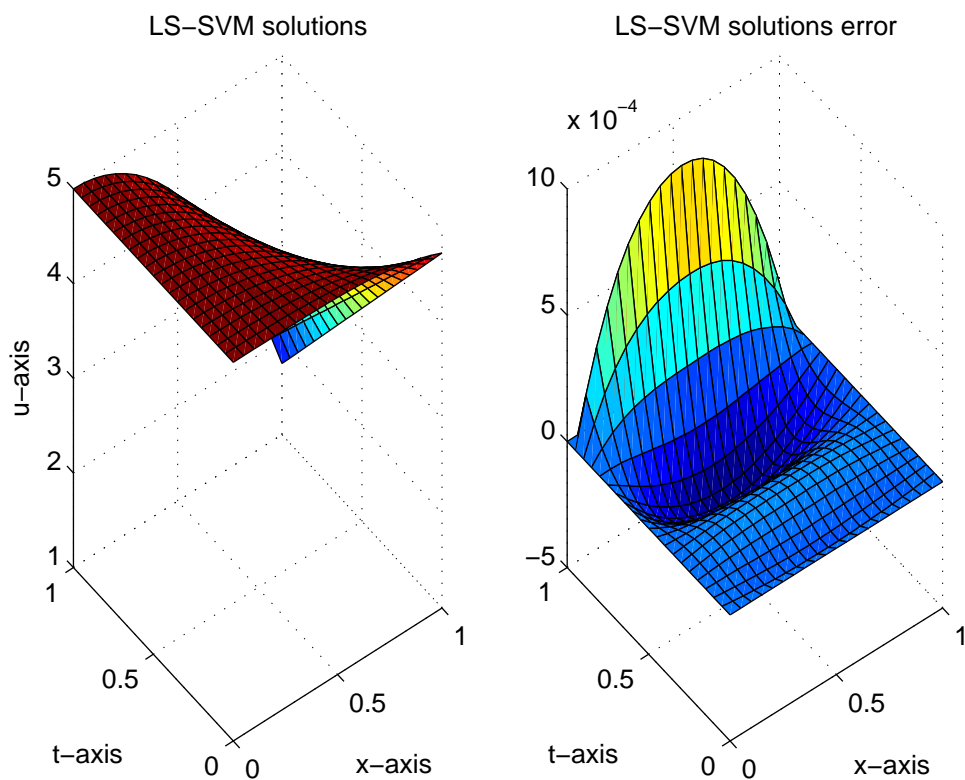


图2 数值实验I05的仿真结果 左图: 反问题LS-SVM的解 右图: LS-SVM解与解析解的误差

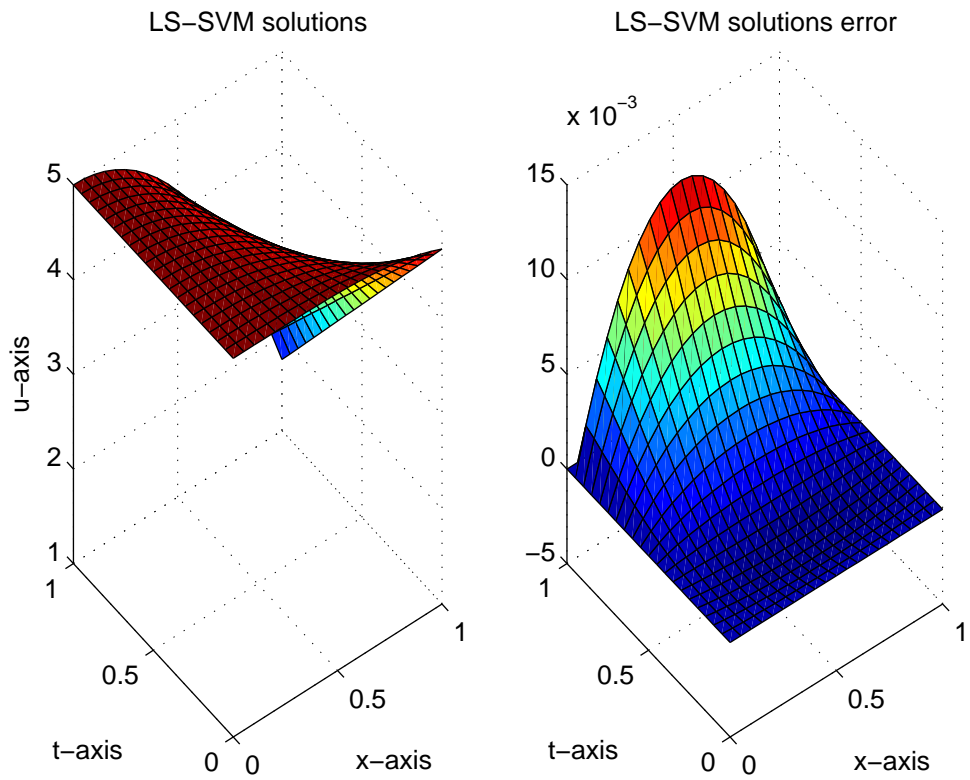


图3 数值实验I08的仿真结果 左图: 反问题LS-SVM的解 右图: LS-SVM解与解析解的误差

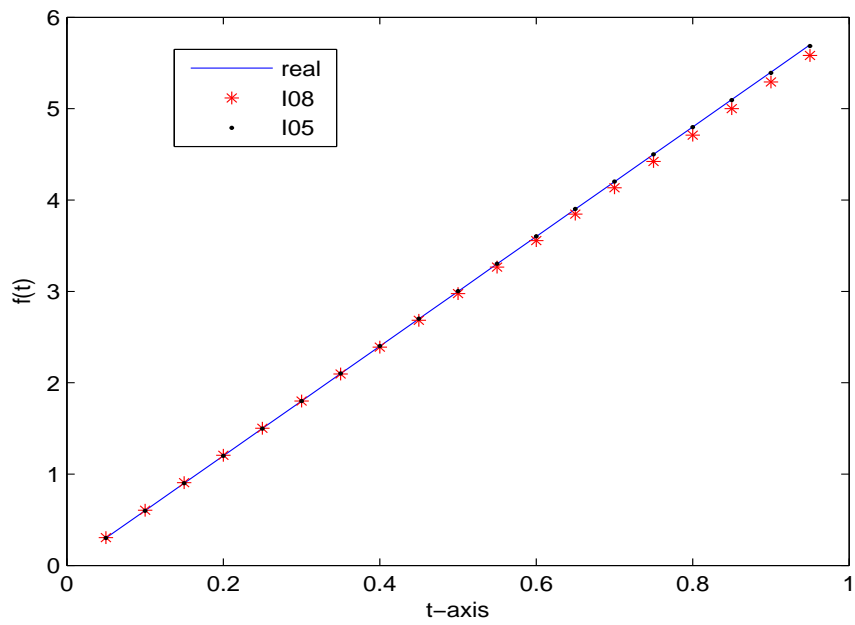


图4 未知函数反演结果与真实结果比较: \* - I08, • - I05, 直线为真解



## 5 结 论

本文利用LS-SVM 研究了一维热传导热源反问题, 推导了反演未知源函数的公式, 给出了半解析解的形式. 这种方法理论完备, 实际应用便捷. 在数值仿真实验中, 我们设计了一系列实验, 以检验该方法的有效性. 仿真结果显示该方法能成功地反演出未知源函数, 并具有较高的精度和较好的稳定性. 我们相信, 该方法完全可以用于其他类型的一些反问题.

- [1] Fabien V, Denis M, Michel G, Michel L 2008 *Inverse Probl. Sci. Eng.* **16** 655
- [2] Zhao Z Y, Meng Z H 2011 *Inverse Probl. Sci. Eng.* **19** 1175
- [3] Slodica M, Lesnic D, Onyango T T M 2010 *Inverse Probl. Sci. Eng.* **18** 65
- [4] Krzysztof G, Renata L 2010 *Inverse Probl. Sci. Eng.* **18** 3
- [5] Quan P H, Trong D D, Triet L M, Tuan N H 2011 *Inverse Probl. Sci. Eng.* **19** 409
- [6] Rashedi K, Adibi H, Dehghan M 2014 *Inverse Probl. Sci. Eng.* **22** 1077
- [7] Wen J 2011 *Inverse Probl. Sci. Eng.* **19** 1007
- [8] Jin B T, Marin L 2007 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **69** 1570
- [9] Mierzwiczak M, kolodziej J A 2011 *Inverse Probl. Sci. Eng.* **19** 777
- [10] Hasanov A, Otelbaev M, Akpayev B 2011 *Inverse Probl. Sci. Eng.* **19** 985
- [11] Alifanov O M 1994 *Inverse Heat Transfer Problems* (Springer-Verlag)
- [12] Lagaris I E, Likas A, Fotiadis D I 1998 *IEEE Trans. Neural Networks* **9** 987
- [13] Lagaris I E, Likas A, Papageorgio D G 2000 *IEEE Trans. Neural Networks* **11** 1041
- [14] Baymani M, Kerayechian A, Effati S 2010 *Appl. Math.* **1** 288
- [15] Alli H, Ucar A, Demir Y 2003 *J. Franklin Insti.* **340** 307

[16] Mehrkanoon S, Suykens J A K 2012 *Automatica* **48** 2502

[17] Mehrkanoon S, Falck T, Suykens J A K 2012 *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Sys.* **23** 1356

[18] Mehrkanoon S, Mehrkanoon S, Suykens J A K 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **19** 830

# Approximate solutions to one-dimensional source inverse heat conduction problem using least squares support vector machines\*

Wu Zi-Ku<sup>1)</sup> Li Fu-Le<sup>1)</sup>† Kwak Do Young<sup>2)</sup>

1)( *Science and Information College, Qingdao Agricultural University, Qingdao, 266109, China* )

2)( *Department of Mathematical Sciences, Korea Advanced Institute of Science and Technology,  
Daejeon, 305701, Korea* )

## Abstract

This article deals with one-dimensional source inverse heat conduction equation. A new approach based on least squares support vector machines (LS-SVM) is proposed for obtaining its semi-analytic approximate solutions. Furthermore, a new parameters tuning formulism is presented. This method has been successfully tested on practical example and has yielded higher accuracy and stability solutions.

**Keywords:** Least squares support vector machines, One-dimensional  
heat conduction equation, Source inverse problem,  
Quadratic programming, Approximate solutions

**PACS:** 02.30.Zz, 02.30.Jr, 02.30.Mv, 02.60.Cb

---

\* Project supported by the International Cooperation for Excellent Lectures by Shandong Provincial Education Department, the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61403233), and the Natural Science Foundation of Shandong Province (Grant No. ZR2009AL012).

† Corresponding author. E-mail: lfl2004666@126.com tel: 13475809931

(为便于美工修图,请把文中所有的图一一列出)

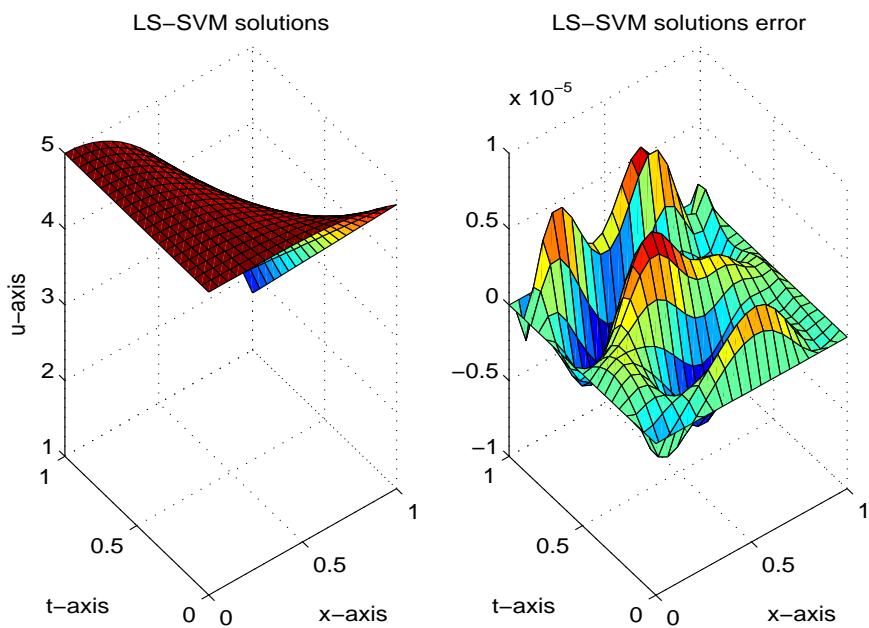


图1 数值实验D02的仿真结果 左图: 正问题LS-SVM的解 右图: LS-SVM解与解析解的误差

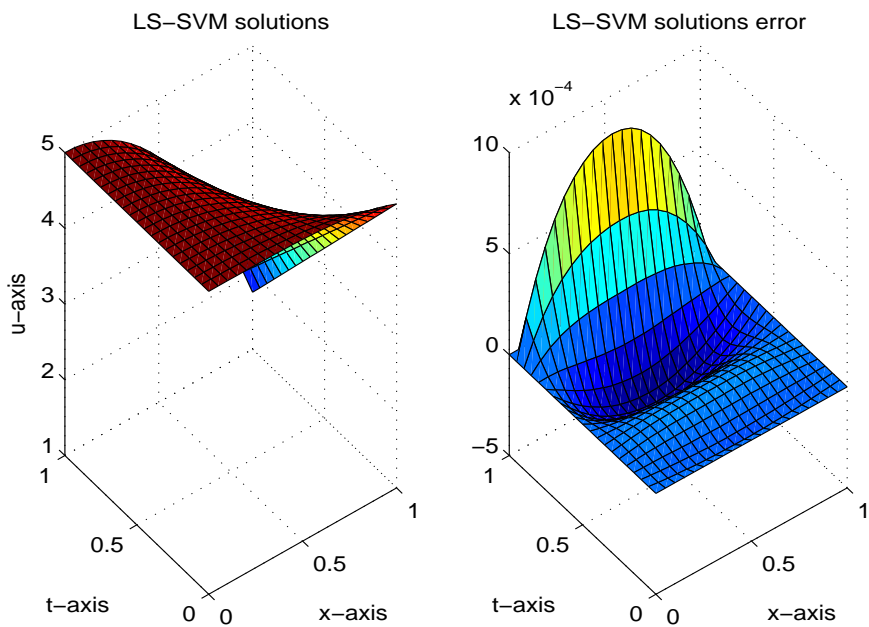


图2 数值实验I05的仿真结果 左图: 反问题LS-SVM的解 右图: LS-SVM解与解析解的误差

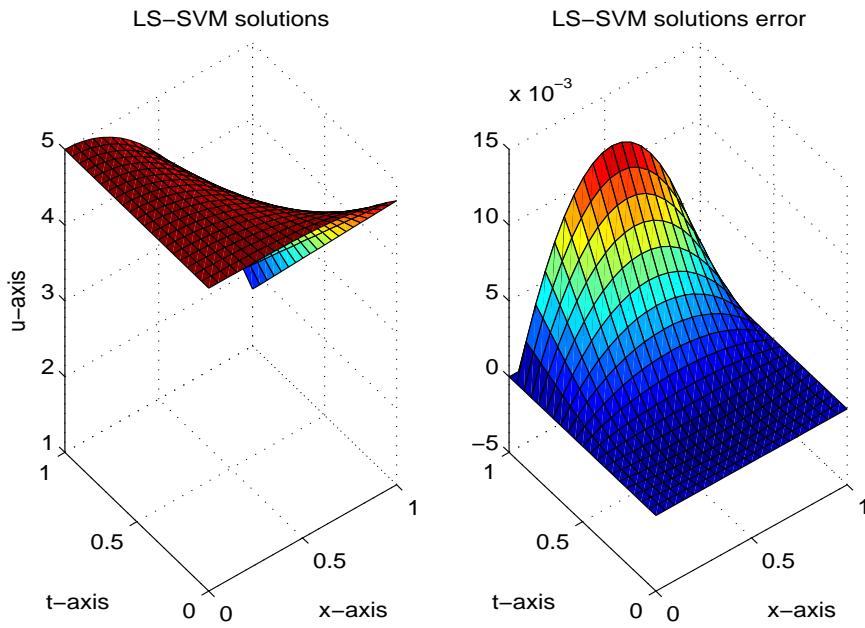


图3 数值实验I08 的仿真结果 左图: 反问题LS-SVM的解 右图: LS-SVM解与解析解的误差

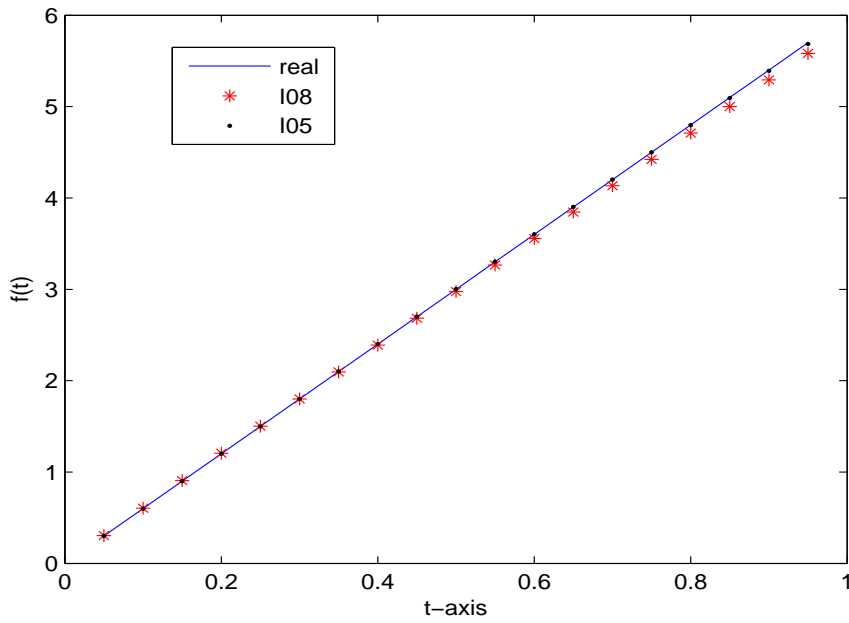


图4 未知函数反演结果与真实结果比较: \* - I08, • - I05, 直线为真解